MINISTERUL EDUCAȚIEI AL REPUBLICII MOLDOVA

Ion Achiri Andrei Braicov Olga Şpuntenco

Matematică

Manual pentru clasa a 9-a

Ediție revizuită şi completată

EDITURA PRUT

Manualul a fost aprobat prin ordinul Ministrului Educației al Republicii Moldova
nr. 528 din 02 iunie 2016.
Lucrarea este elaborată conform curriculumului disciplinar şi apare cu sprijinul financiar al Fondului Special pentru Manuale.

Şcoala/Liceul ....
Manualul nr. ....

Anul de folosire	Numele şi prenumele elevului	Anul şcolar	Aspectul manualului	
			la primire	la returnare
1				
2				
3				
4				
5				

• Dirigintele clasei va controla dacă numele elevului este scris corect.
• Elevii nu vor face nici un fel de însemnări în manual.
• Aspectul manualului (la primire şi la returnare) se va aprecia: *nou*, *bun*, *satisfăcător*, *nesatisfăcător*.

Comisia de evaluare:
Aliona Laşcu, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Mihai Eminescu”, Chişinău
Mariana Morari, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Gaudeamus”, Chişinău
Carolina Parfene, profesoară, grad didactic I, Liceul Teoretic „Ginta Latină”, Chişinău

Redactor: *Tatiana Rusu*
Corector: *Fulga Poiată*
Coperta: *Sergiu Stanciu*
Paginare computerizată: *Valentina Stratu*

Editura *Prut Internațional*, str. Alba Iulia nr. 23, bl. 1 A, Chişinău, MD 2051
Tel.: (+373 22) 75 18 74; tel./fax: (+373 22) 74 93 18; e-mail: editura@prut.ro, www.edituraprut.md

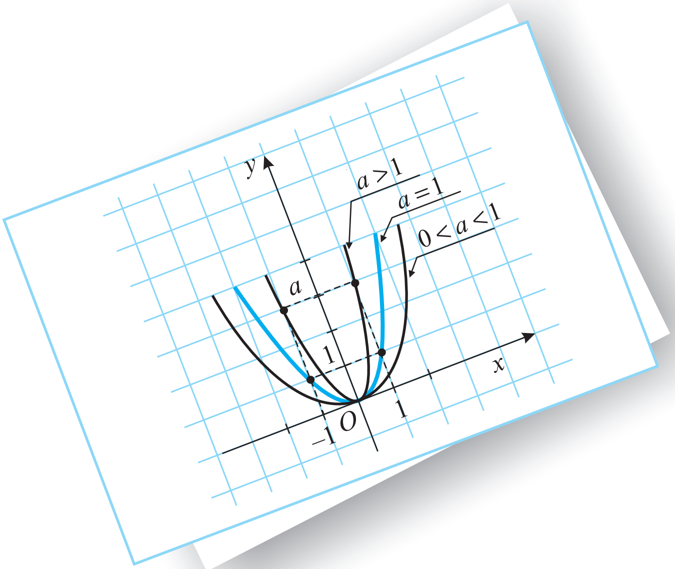
Difuzare: Societatea de Distribuție a Cărților *PRO NOI*, str. Alba Iulia nr. 75, bl. Q, Chişinău, MD 2071
Tel.: (+373 22) 51 68 17, (+373 22) 58 93 08; www.pronoi.md; e-mail: info@pronoi.md

Imprimat la F.E.-P. *Tipografia Centrală*. Comanda nr. 8524 (2016)

CZU 51(075.3)
A 16

ISBN 978-9975-54-255-5

ALGEBRĂ



$$P(X) = Q(X) \cdot C(X) + R(X)$$

Capitolul 1

Recapitulare și completări

§ 1. Mulțimea numerelor reale

1.1. Noțiunea de număr real

• Examinați schema, apoi substituiți fiecare casetă cu un element sau cu o submulțime a mulțimii $A=\{-5;\ -21;\ -\sqrt{3};\ 0;\ 2;\ 3\frac{1}{4};\ \sqrt{7};\ 5{,}8;\ 9\}$.

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\mathbb{N}} \arrow[r, "\text{+ rezultatele tuturor scăderilor}"] \arrow[d, "\text{+ rezultatele tuturor împărțirilor}"] & \boxed{\mathbb{Z}} \arrow[d, "\text{+ rezultatele tuturor împărțirilor}"] & \boxed{\mathbb{I}} \arrow[d, "\text{+ toate numerele raționale}"] \\
\boxed{\mathbb{Q}_+} \arrow[r, "\text{+ rezultatele tuturor scăderilor}"'] & \boxed{\mathbb{Q}} \arrow[r, "\text{+ toți radicalii și celelalte numere}"'] & \boxed{\mathbb{R}}
\end{tikzcd}$$

$\square \in \mathbb{Z}$	$\square \subset \mathbb{Z}$
$\square \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}$	$\square \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$\square \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$	$\square \subset \mathbb{Q}$
$\square \in \mathbb{Q}_+$	$\square \subset \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$

Model: $\sqrt{3}\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
$\{2;\ 9\}\subset\mathbb{N}$

Notații:

$\mathbb{N}=\{0, 1, 3, 4, ...\}$ – mulțimea numerelor naturale.

$\mathbb{N}^*=\{1, 2, 3, 4, ...\}$ – mulțimea numerelor naturale nenule.

$\mathbb{Z}=\{...\ -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ – mulțimea numerelor întregi.

$\mathbb{Q}=\{x \mid x=\frac{m}{n},\ m\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{N}^*\}$ – mulțimea numerelor raționale.

$\mathbb{I}=\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}=\{x \mid x$ – număr zecimal neperiodic cu un număr infinit de zecimale$\}$ – mulțimea numerelor iraționale.

$\mathbb{R}=\{x \mid x$ – număr rațional sau irațional$\}$ – mulțimea numerelor reale.

Sînt adevărate relațiile: $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R};\ \mathbb{I}\subset\mathbb{R};\ \mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$.

$\mathbb{R}^*$ – mulțimea numerelor reale nenule;

$\mathbb{R}^*_+$ – mulțimea numerelor reale pozitive;

$\mathbb{R}^*_-$ – mulțimea numerelor reale negative.

• Scrieți sub formă de număr zecimal fracția $\frac{33}{18}$.

Rezolvare:

Efectuăm împărțirea şi obținem: $\frac{33}{18} = 1{,}8(3)$.

$1{,}8(3)$ este un număr zecimal periodic mixt.

Definiții

♦ Numerele zecimale periodice a căror perioadă urmează imediat după virgulă se numesc **numere zecimale periodice simple**.

♦ Numerele zecimale periodice a căror perioadă nu urmează imediat după virgulă se numesc **numere zecimale periodice mixte**.

APLICĂM

• Scrieți sub formă de fracție numărul zecimal: a) 0,(26); b) 25,2(43).

Rezolvare:

a) Fie $x = 0,(26)$.

Atunci $100x = 26,(26) = 26 + x \Leftrightarrow 100x - x = 26 \Leftrightarrow x = \frac{26}{99}$.

Răspuns: $0,(26) = \frac{26}{99}$.

În general, $0,(\overline{a_1 a_2 ... a_n}) = \frac{\overline{a_1 a_2 ... a_n}}{\underbrace{99...9}_{n \text{ cifre}}}$, unde $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt cifre.

b) ***Metoda I***. Fie $x = 25{,}2(43)$.

Atunci $10x = 252,(43) = 252 + 0,(43) = 252 + \frac{43}{99} = \frac{24\,991}{99} \Leftrightarrow x = \frac{24\,991}{990} = 25\frac{241}{990}$.

Metoda II. $25{,}2(43) = 25 + \frac{243 - 2}{990} = 25\frac{241}{990}$.

Răspuns: $25{,}2(43) = 25\frac{241}{990}$.

În general, $0,\overline{a_1 a_2 ... a_n (b_1 b_2 ... b_m)} = \frac{\overline{a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_m} - \overline{a_1 a_2 ... a_n}}{\underbrace{99...9}_{m \text{ cifre}}\underbrace{00...0}_{n \text{ cifre}}}$.

Un număr real poate fi scris sub forma:

a) unui număr zecimal cu un număr finit de zecimale;

b) unui număr zecimal neperiodic cu un număr infinit de zecimale;

c) unui număr zecimal periodic cu perioada diferită de 9.

1.2. Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor

• Reprezentați numărul $\sqrt{2}$ pe axa numerelor:
a) folosind aproximațiile lui zecimale;
b) geometric (cu ajutorul riglei şi compasului).

Rezolvare:

Cum $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, rezultă că $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$. Obținem următoarea reprezentare aproximativă a numărului $\sqrt{2}$ pe axa numerelor (fig. 1):

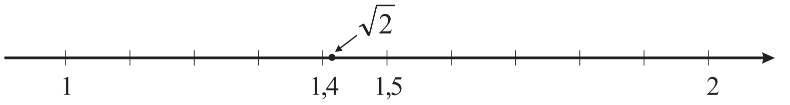


Fig. 1

b) Construim pe axa numerelor pătratul *OABC* cu latura $AB = 1$ (fig. 2).

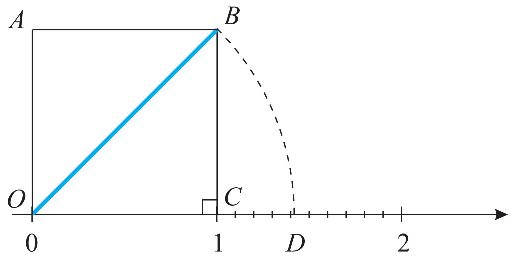


Fig. 2

Aplicînd teorema lui Pitagora triunghiului OCB $(m(\angle C) = 90°)$, obținem $OB = \sqrt{2}$. Construim, cu ajutorul compasului, pe axa numerelor segmentul *OD*, astfel încît $OD = OB = \sqrt{2}$. Atunci punctul *D* are coordonata $\sqrt{2}$.

De regulă, numerele iraționale se reprezintă pe axa numerelor folosind aproximările lor zecimale.

Fiecărui număr real *a* îi corespunde un punct *A* al axei numerelor şi, reciproc, fiecărui punct *A* al axei numerelor îi corespunde un număr real *a*. De aceea vorbim despre punctele axei numerelor ca despre numere reale, şi invers.

Numărul *a* se numeşte ***coordonata*** punctului *A*; se notează *A*(*a*).

Folosind reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor, pot fi rezolvate diverse probleme. Una dintre ele este compararea numerelor reale. (O altă modalitate de comparare a numerelor reale va fi examinată în secvența 2.2.)

De exemplu, dacă numerele reale *a* şi *b* sînt respectiv coordonatele punctelor *A* şi *B* ale axei numerelor şi $\overrightarrow{AB}$ are sensul axei, atunci $a < b$ (fig. 3).

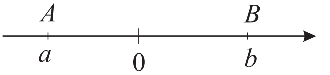


Fig. 3

> Dintre două numere reale reprezentate pe axa numerelor, mai mare este numărul situat în dreapta celuilalt.

APLICĂM

• Comparați numerele:

a) $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$; b) $\sqrt{2}$ şi $-\sqrt{2}$.

Rezolvare:

a) Deoarece $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ şi $\sqrt{3} \approx 1{,}7$, iar $1{,}4 < 1{,}7$, obținem $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

Răspuns: $\sqrt{2} < \sqrt{3}$.

b) Cum $\sqrt{2} > 0$, iar $-\sqrt{2} < 0$, obținem $\sqrt{2} > -\sqrt{2}$.

Răspuns: $-\sqrt{2} < \sqrt{2}$.

Observație. Numerele $\sqrt{2}$ şi $-\sqrt{2}$ sînt numere reale opuse, adică punctele $D(\sqrt{2})$ şi $D'(-\sqrt{2})$ ale axei numerelor sînt simetrice față de originea ei, şi invers, coordonatele punctelor $D(\sqrt{2})$ şi $D'(-\sqrt{2})$, simetrice față de originea O, sînt numere reale opuse (fig. 4).

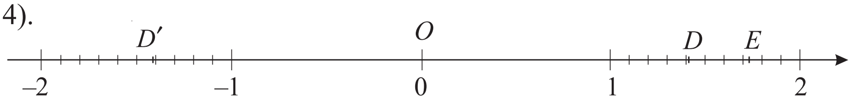


Fig. 4

Numere reale opuse sînt numerele reale situate pe axa numerelor de părți diferite față de origine şi la distanțe egale de ea.

Numere reale opuse sînt numerele reale de forma a şi $-a$.

1.3. Modulul numărului real

• Explicitați modulul:

a) $|3-\sqrt{2}|$; b) $|1-\sqrt{3}|$; c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 3\}$; d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x| > \frac{1}{3}\right\}$.

Rezolvare:

a) $|3-\sqrt{2}| = 3-\sqrt{2}$, deoarece $3 > \sqrt{2}$;

b) $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-1$, deoarece $1 < \sqrt{3}$;

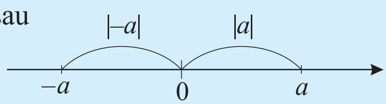
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \le 3\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in [-3, 3]\}$;

d) $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, |x| > \frac{1}{3}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right)\right\}$.

Modulul sau ***valoarea absolută*** a unui număr real a este:

$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \ge 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$ sau $|a| = \max\{-a, a\}$, sau

distanța de la a la 0 pe axă.



Proprietăți ale modulului unui număr real

1° $|a| \geq 0$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, şi $|a| = 0$ dacă şi numai dacă $a = 0$.

2° $|a| \geq a$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

3° $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

4° $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

5° $|a|^2 = |a^2| = |-a|^2 = a^2$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

APLICĂM

• Explicitați modulul utilizînd proprietățile lui şi aduceți la forma cea mai simplă:

a) $|3-\sqrt{2}| \cdot |3+\sqrt{2}|$;

b) $|1-\sqrt{7}| \cdot (1+\sqrt{7})$;

c) $|x+y| : (x+y)^2$.

Rezolvare:

a) $|3-\sqrt{2}| \cdot |3+\sqrt{2}| = |(3-\sqrt{2}) \cdot (3+\sqrt{2})| = |9-2| = 7$;

b) $|1-\sqrt{7}| \cdot (1+\sqrt{7}) = -(1-\sqrt{7}) \cdot (1+\sqrt{7}) = -(1-7) = 6$;

c) $|x+y| : (x+y)^2 = |x+y| \cdot \frac{1}{|x+y|^2} = \frac{1}{|x+y|}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie mulțimile:

1) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; 2) $\mathbb{Q}_+ \setminus \mathbb{N}$; 3) $\mathbb{Q}_- \setminus \mathbb{Z}$; 4) $\mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$;
5) $\mathbb{R}_-^* \setminus \mathbb{Q}$; 6) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_+$; 7) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{I}$.

Aflați elementele mulțimii $\{-1{,}4;\ \sqrt{5};\ 7{,}(2);\ -21\frac{1}{4};\ 0{,}18;\ 2010;\ \sqrt{21}\}$ care aparțin fiecăreia din mulțimile 1) – 7).

2. Fie numerele $12;\ \sqrt{16};\ 3{,}(7);\ -38\frac{1}{2};\ 2011;\ -\sqrt{13};\ 0;\ 6\sqrt{5};\ \pi$.

Determinați care dintre aceste numere sînt raționale şi care – iraționale.

3. 1) Scrieți ca număr zecimal fracția:

a) $\frac{7}{8}$; b) $\frac{51}{15}$; c) $\frac{131}{27}$; d) $\frac{210}{198}$.

2) Aflați perioada fiecărui număr zecimal obținut.

4. Fie numerele:

a) 0,(3); b) 2,1(6); c) 5,(738);
d) 17,0(18); e) 83,(685); f) 70,13(18).

Determinați care dintre numerele zecimale periodice date sînt numere zecimale periodice simple şi care – numere zecimale periodice mixte.

5. Reprezentați pe axa numerelor punctele:

$$A(-7),\ B\left(\frac{1}{2}\right),\ C(-1{,}25),\ D\left(3\frac{1}{4}\right),\ E(7).$$

6. Completați fiecare casetă cu un număr din mulțimea $\left\{\frac{1}{4};\ 0{,}75;\ 0,(3);\ 5{,}5\right\}$, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată:

$$\frac{3}{4}=\square;\quad \frac{1}{3}=\square;\quad 0{,}25=\square;\quad 5\frac{1}{2}=\square.$$

7. Bunicul le spune nepoților: „Am pentru voi 130 de nuci. Împărțiți-le în două părți, astfel încît partea mai mică, fiind mărită de 4 ori, să fie egală cu partea mai mare micşorată de 3 ori.” Cum să procedeze nepoții?

Formăm capacitățile și aplicăm

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația şi determinați ce tip de numere, raționale sau iraționale, sînt soluțiile ei:

a) $3\sqrt{2}x+7=0$; b) $16x-3(x+1)=5x$;
c) $2{,}5(x-4)-6x=3-x$; d) $x^2-3x-10=0$;
e) $2x^2+7x-8=0$; f) $-x^2+10x+2=0$.

9. Scrieți sub formă de fracție numărul zecimal:

a) 0,(18); b) 3,(2); c) 6,1(8); d) 5,12(18); e) 25,1(378).

10. Utilizînd axa numerelor, completați cu unul dintre semnele „<”, „>”, „=”:

a) $1+\sqrt{7}\ \square\ 2\sqrt{3}$; b) $-\sqrt{36}\ \square\ -6{,}123...$;
c) $3{,}78\ \square\ \sqrt{11}$; d) $-\frac{1}{3}\ \square\ -0,(33)$.

11. Explicitați modulul:

a) $|1-\sqrt{7}|$; b) $|-\sqrt{3}-\sqrt{2}|$; c) $|8-\sqrt{49}|$; d) $|(3-\sqrt{2})^2|$.

12. Explicitați modulul:

a) $\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x|\le 7\}$; b) $\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x|\le 0\}$;
c) $\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x|>0\}$; d) $\{x\in\mathbb{R}\,\big|\,|x|\ge\sqrt{5}\}$.

13. Reprezentați pe axa numerelor mulțimile obținute la exercițiul 12 în urma explicitării modulului.

14. Se dau două vase, de capacitatea 5 *l* şi 7 *l*. Cum putem obține 4 *l* de apă folosind doar aceste două vase?

15. Stafidele obținute la uscarea strugurilor reprezintă 32% din cantitatea inițială a acestora. Din ce cantitate de struguri s-au obținut 8 kg de stafide?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

16. Cercetați dacă este rațional numărul:

a) $\sqrt{8}$; b) 7,2(15); c) $1-\sqrt{5}$; d) $\sqrt{225}$; e) $\sqrt{13}$.

17. Construiți pe axa numerelor, cu ajutorul riglei şi compasului, punctul a cărui coordonată este numărul irațional:

a) $\sqrt{13}$; b) $\sqrt{17}$; c) $-\sqrt{17}$; d) $-\sqrt{11}$.

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|3x-7|=8$; b) $|2x^2+17x+658|=-2\sqrt{19}$;
c) $|x|\cdot|x-3|=4$; d) $|2x(x-0,5)|=3$.

19. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|3x-1|=|1-x|$; b) $|2+x|=|5x-3|$;
c) $2|x|=|x-3|+2$; d) $|2x-1|=|x+5|-2$.

§2. Operații cu numere reale

2.1. Proprietăți ale operațiilor cu numere reale

• Calculați $2\sqrt{11}+\sqrt{7}$:

1) cu aproximație de 0,2;
2) cu aproximație de 0,02;
3) cu aproximație de 0,002.

Rezolvare:

Avem: $\sqrt{11}=3,316...$, $\sqrt{7}=2,645...$ Atunci $2\sqrt{11}=6,633...$

Folosind aproximările zecimale, prin lipsă şi prin adaos, ale numărului irațional, obținem:

1) $6,6<2\sqrt{11}<6,7$ şi $2,6<\sqrt{7}<2,7$.

Atunci $6,6+2,6<2\sqrt{11}+\sqrt{7}<6,7+2,7$.

Deci, $9,2<2\sqrt{11}+\sqrt{7}<9,4$;

2) $6,63<2\sqrt{11}<6,64$ şi $2,64<\sqrt{7}<2,65$.

Deci, $9,27<2\sqrt{11}+\sqrt{7}<9,29$;

3) $6,633<2\sqrt{11}<6,634$ şi $2,645<\sqrt{7}<2,646$.

Deci, $9,278<2\sqrt{11}+\sqrt{7}<9,280$.

Observație. În funcție de aproximația necesară şi folosind procedeul anterior, se poate obține numărul $2\sqrt{11}+\sqrt{7}$ cu una dintre aproximațiile 0,2; 0,02; 0,002 ş.a.m.d.

De exemplu, $2\sqrt{11}+\sqrt{7}\approx 9,27$ (prin lipsă) şi $2\sqrt{11}+\sqrt{7}\approx 9,29$ (prin adaos) cu aproximație de 0,02.

Proprietăți ale adunării și înmulțirii numerelor reale

1° ***Asociativitatea***: $a+(b+c)=(a+b)+c$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.	$a \cdot (b \cdot c)=(a \cdot b) \cdot c$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2° ***Comutativitatea***: $a+b=b+a$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.	$a \cdot b=b \cdot a$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.
3° 0 ***este element neutru pentru adunare***: $a+0=0+a=0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.	1 ***este element neutru pentru înmulțire***: $1 \cdot a=a \cdot 1=a$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
4° Pentru orice număr real a există ***opusul*** său, numărul $-a$, astfel încît $a+(-a)=0$.	Pentru orice număr real nenul a există ***inversul*** său, numărul $\frac{1}{a}$, astfel încît $a \cdot \frac{1}{a}=\frac{1}{a} \cdot a=1$.
5° —	$a \cdot 0=0 \cdot a=0$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

6° ***Distributivitatea înmulțirii față de adunare*** (***scădere***):

$$a \cdot (b \pm c)=a \cdot b \pm a \cdot c \text{ pentru orice } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Observații. **1.** $a-b=a+(-b)$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$.

2. $a:b=a \cdot \frac{1}{b}$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$.

Ordinea efectuării operațiilor şi folosirea parantezelor în mulțimea $\mathbb{R}$

I. Într-o expresie fără paranteze, cu operații de diferite ordine, se efectuează (în ordinea în care sînt scrise) întîi extragerea rădăcinii pătrate şi ridicarea la putere, apoi înmulțirea şi împărțirea şi, la sfîrşit, adunarea şi scăderea.

II. Într-o expresie cu paranteze se efectuează întîi operațiile din paranteze, respectîndu-se regulile precedente.

2.2. Compararea numerelor reale

• Comparați numerele: a) $\frac{2}{3}$ şi $\frac{3}{4}$; b) $\sqrt{2}$ şi 1,3; c) $4-\sqrt{5}$ şi -3.

Rezolvare:

a) $\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$ → deoarece $\frac{2}{3}=0,(6)$, $\frac{3}{4}=0,75$ şi $0,(6)<0,75$;

b) $\sqrt{2}>1,3$ → deoarece $\sqrt{2}\approx 1,4$ şi $1,4>1,3$;

c) $4-\sqrt{5}>-3$ → deoarece $\sqrt{5}\approx 2,2$; deci, $4-\sqrt{5}>0$, iar $-3<0$.

Atenție! Oricare două numere reale pot fi comparate, adică oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, avem $a<b$ sau $a=b$.
Dacă $a=b$ sau $a<b$ $(a>b)$, scriem $a \le b$ $(a \ge b)$.

APLICĂM

• Scrieți în ordine crescătoare numerele $\sqrt{7}$, 5, $2\sqrt{2}$, -3.

Rezolvare:

Avem $\sqrt{7} \approx 2{,}6$, $2\sqrt{2} \approx 2{,}8$. Deci, $2\sqrt{2} > \sqrt{7}$. Cum $-3 < \sqrt{7} < 2\sqrt{2} < 5$, obținem ordonarea cerută: -3, $\sqrt{7}$, $2\sqrt{2}$, 5.

Legătura dintre relația de ordine „ $\le$ ” și operațiile de adunare și înmulțire în mulțimea $\mathbb{R}$ se exprimă prin următoarele ***proprietăți***:

1° Dacă $a \le b$ și $c \in \mathbb{R}$, atunci $a + c \le b + c$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.

2° Dacă $a \le b$ și $c \le d$, atunci $a + c \le b + d$ pentru orice $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

3° Dacă $a \le b$ și $c > 0$, atunci $ac \le bc$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.

4° Dacă $a \le b$ și $c < 0$, atunci $ac \ge bc$ pentru orice $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5° Dacă $a \le b$, $c \le d$ și $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+^*$, atunci $ac \le bd$ și $\dfrac{a}{d} \le \dfrac{b}{c}$.

Observație. Proprietăți similare pot fi obținute înlocuind semnul „$\le$” cu oricare dintre semnele „$<$”, „$\ge$”, „$>$”.

Numerele reale pot fi comparate folosind aproximările lor zecimale sau reprezentările lor pe axa numerelor.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $3\sqrt{2}(2+\sqrt{2}) - 5(3{,}5 - \sqrt{6}) + 11 : (7 - 1{,}5)$; b) $\dfrac{2}{5} \cdot 0{,}25 + 78 : 4 - 8\sqrt{5} : \sqrt{5} - 3 \cdot 7\sqrt{2}$.

2. Calculați cu aproximație de 0,001:

a) $\sqrt{7}$; b) $\sqrt{3}$; c) $2\sqrt{2}$; d) $3\sqrt{5}$.

3. Comparați numerele:

a) $\dfrac{5}{7}$ și $\dfrac{3}{4}$; b) $\sqrt{7}$ și 2,65; c) $3 - \sqrt{2}$ și 1,7; d) $1 + \sqrt{3}$ și $2 + \sqrt{2}$.

4. Scrieți în ordine crescătoare: $3\sqrt{2}$; $-3,(56)$; $2\sqrt{3}$; $1+\sqrt{2}$; $2,(15)$; $-2\frac{1}{5}$; $2-\sqrt{5}$.

5. Legumele crude (100 g) conțin 27 mg de acid ascorbic (vitamina C). Aceleași legume, fierte, conțin 18 mg de acid ascorbic. Calculați, în procente, pierderea vitaminei C în timpul fierberii.

6. Pentru a prepara o prăjitură de ciocolată (6 porții) se folosesc următoarele ingrediente: 250 g de unt, 200 g de zahăr, 300 g de ciocolată, 6 ouă și 3 linguri de făină. Care sînt cantitățile necesare pentru fiecare ingredient în cazul în care se prepară 4 porții?

7. Pe eticheta unei sticluțe cu mixtură este scris: 40 ± 3 ml. Ce puteți spune despre cantitatea de mixtură din sticluță?

8. Scrieți ca sumă, diferență, produs şi cît de două numere reale, diferite de 0 şi 1, numărul:

a) $3\sqrt{7}$; b) $8+\sqrt{5}$; c) $-2\sqrt{3}$; d) $-7{,}5$; e) 18; f) $\sqrt{6}-\sqrt{11}$.

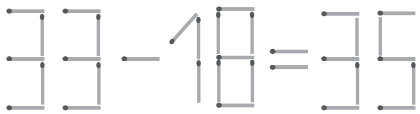
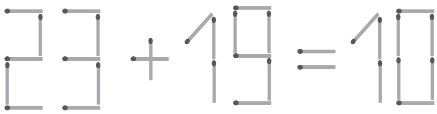
Formăm capacitățile și aplicăm

9. De cîte ori la cel mai mare număr de o cifră trebuie adăugat cel mai mare număr de două cifre pentru a obține cel mai mare număr de trei cifre?

10. Suma, produsul şi cîtul căror numere reale sînt egale între ele?

11. Completați şirul 12; 18; 27; 40,5; ▢; ▢.

12. Schimbați poziția unui chibrit, astfel încît să obțineți o propoziție adevărată:

a)  b) 

13. Efectuați: a) $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$; b) $(2\sqrt{7}+1)^2$; c) $(3-\sqrt{7})^2$; d) $(3\sqrt{2}+2\sqrt{5})^2$.

14. Efectuați: a) $(2-\sqrt{3})^3$; b) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})^3$; c) $(3\sqrt{5}+1)^3$; d) $(2+\sqrt{3})^3$.

15. Calculați, prin rotunjire, cu aproximație de 0,002:

a) $3\sqrt{7}+2\sqrt{5}$; b) $7\sqrt{2}-9\sqrt{3}$; c) $-3\sqrt{2}-5$; d) $3(\sqrt{5}-\sqrt{2})$.

16. Stabiliți legitatea şi aflați numărul omis:

$\sqrt{3}-2\sqrt{2}$	2	$11-4\sqrt{6}$
$1+\sqrt{5}$	3	?

17. Prețul unui televizor s-a majorat cu 20%, apoi, peste o lună, cu încă 20%. Cu cîte procente s-a majorat prețul inițial al televizorului?

18. La copierea exercițiului $20:5\cdot 2+6^2$ un elev a uitat să pună paranteze. Restabiliți parantezele, dacă se ştie că răspunsul trebuie să fie numărul: a) 38; b) 196; c) 152.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

19. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sqrt{(2-3\sqrt{3})^2}+2|3-\sqrt{13}|-7{,}5(4-\sqrt{8})^2+6{,}4:(5-1{,}8)$;

b) $|7-2\sqrt{3}|+|1-3\sqrt{3}|^2-6(\sqrt{3}+8)-\sqrt{(2-7\sqrt{3})^2}$.

20. Efectuați:

a) $(a-b+c)^2$; b) $(a-b-c)^2$; c) $(a+b+c)^2$.

21. Calculați:

a) $7,(15)+2,(18)-5,(23)+11,(20)$; b) $-5{,}2(7)+6{,}1(3)-3{,}5(3)+2{,}2(2)$.

22. Scrieți numărul 34 000 ca diferența pătratelor a două numere naturale.

§ 3. Puteri și radicali

3.1. Rădăcina pătrată a unui număr real și proprietățile ei. Recapitulare și completări

• Calculați: a) $\sqrt{6\frac{1}{4}}$; b) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}$.

Rezolvare:

a) $\sqrt{6\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{25}{4}}=\frac{5}{2}$ → deoarece $\frac{5}{2}\geq 0$ şi $\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$;

b) $\sqrt{16-6\sqrt{7}}=\sqrt{(\sqrt{7}-3)^2}=$
$=|\sqrt{7}-3|=3-\sqrt{7}$ → deoarece $(3-\sqrt{7})\geq 0$ şi $(3-\sqrt{7})^2=16-6\sqrt{7}$.

Definiție

Rădăcină pătrată a unui număr real nenegativ *a* (sau **radical de ordinul doi din *a***) se numeşte numărul real nenegativ b al cărui pătrat este a.

Rădăcina pătrată a numărului real nenegativ a se notează $\sqrt{a}$.

Proprietăți ale rădăcinii pătrate

1° Dacă a este un număr real, atunci $\sqrt{a^2}=|a|$.

2° Dacă a şi b sînt numere reale nenegative, atunci $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$.

3° Dacă a este un număr real nenegativ, iar b – un număr real pozitiv, atunci $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}$.

4° Dacă a este un număr real, iar b – un număr real nenegativ, atunci $\sqrt{a^2b}=|a|\cdot\sqrt{b}$.

APLICĂM

• Calculați $\frac{\sqrt{3,6}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}}$.

Rezolvare:

$\frac{\sqrt{3,6}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{10}}=\sqrt{\frac{3,6}{3}}\cdot\sqrt{\frac{48}{10}}=$ → aplicăm proprietatea 3°

$=\sqrt{\frac{3,6\cdot 48}{10\cdot 3}}=\sqrt{0,36}\cdot\sqrt{16}=$ → aplicăm proprietatea 2°

$=0,6\cdot 4=2,4.$

• Aduceți la forma cea mai simplă expresia $\frac{3b^2}{5a}\cdot\sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}}$, dacă $a<0,\ b>0$.

Rezolvare:

$\frac{3b^2}{5a}\cdot\sqrt{\frac{50a^2}{81b^2}}=\frac{3b^2}{5a}\cdot\frac{\sqrt{50a^2}}{\sqrt{81b^2}}=$ → aplicăm proprietatea

$=\frac{3b^2\cdot\sqrt{50}\cdot\sqrt{a^2}}{5a\cdot\sqrt{81}\cdot\sqrt{b^2}}=$ → aplicăm proprietatea

$=\frac{3b^2\cdot 5\sqrt{2}\cdot|a|}{5a\cdot 9\cdot|b|}=$ → aplicăm proprietatea

$=\frac{b^2\cdot(-a)\cdot\sqrt{2}}{a\cdot 3b}=-\frac{b\sqrt{2}}{3}$ → deoarece $a<0,\ b>0$.

INVESTIGĂM

• Raționalizați numitorul raportului: a) $\frac{14}{3\sqrt{7}}$; b) $\frac{3}{4-\sqrt{10}}$.

Rezolvare:

a) $\frac{14}{3\sqrt{7}}=\frac{14\cdot\sqrt{7}}{3\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=$ → amplificăm raportul cu $\sqrt{7}$

$=\frac{14\sqrt{7}}{3\cdot 7}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$;

b) $\frac{3}{4-\sqrt{10}}=\frac{3(4+\sqrt{10})}{(4-\sqrt{10})(4+\sqrt{10})}=$ → amplificăm raportul cu expresia conjugată numitorului: $4+\sqrt{10}$

$=\frac{3(4+\sqrt{10})}{16-10}=\frac{3(4+\sqrt{10})}{6}=\frac{4+\sqrt{10}}{2}$.

Definiție

Expresiile $a+\sqrt{b}$ şi $a-\sqrt{b}$, $a, b\in\mathbb{R}$, $b>0$, se numesc **expresii conjugate**.

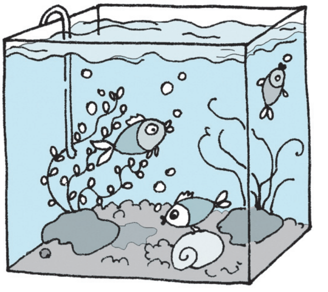
Raționalizare a numitorului unui raport se numeşte transformarea care elimină radicalii de la numitorul acestuia.

GENERALIZĂM

• Fie E o expresie. Raționalizarea numitorului unui raport poate fi efectuată amplificînd raportul de tipul:

1. $\frac{E}{a\sqrt{b}}$, $a\in\mathbb{R}^*$, $b\in\mathbb{R}_+^*$, cu $\sqrt{b}$;
2. $\frac{E}{a\pm\sqrt{b}}$, $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}_+^*$, cu expresia conjugată numitorului raportului dat.

3.2. Noțiunea de radical de ordinul trei (opțional)



• Tatăl a hotărît să-i dăruiască lui Sergiu un acvariu de formă cubică, cu volumul de $64\,000\ \text{cm}^3$. El i-a propus fiului să determine dimensiunile acvariului pentru a-i găsi un loc potrivit în apartament.

Cum va afla Sergiu dimensiunile acvariului?

Rezolvare:

Fie b lungimea muchiei acestui cub, atunci volumul lui este $\mathcal{V} = b^3$. Din condiția problemei rezultă că trebuie să aflăm un număr b, astfel încît $b^3 = 64\,000$. Obținem $b = 40$, deoarece $40^3 = 64\,000$.

Răspuns: Acvariul va avea dimensiunile 40 cm, 40 cm, 40 cm.

Rezolvînd problema, am obținut $b = 40$, astfel încît $b^3 = 64\,000$. Numărul b este radical de ordinul trei din numărul $64\,000$ şi se notează $\sqrt[3]{64\,000} = 40$.

Definiție

Numărul real b se numeşte **radical de ordinul trei** din numărul real a (sau **rădăcină cubică** a numărului a), dacă $b^3 = a$.

Radicalul de ordinul trei din numărul a se notează $\sqrt[3]{a}$.

APLICĂM

Calculați: a) $\sqrt[3]{125}$; b) $\sqrt[3]{-8}$; c) $\sqrt[3]{0{,}027}$; d) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$.

Rezolvare:

a) $\sqrt[3]{125} = 5$ → deoarece $5^3 = 125$;

b) $\sqrt[3]{-8} = -2$ → deoarece $(-2)^3 = -8$;

c) $\sqrt[3]{0{,}027} = 0{,}3$ → deoarece ______;

d) $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} = \sqrt[3]{\frac{64}{27}} = \frac{4}{3}$ → deoarece ______.

3.3. Puteri cu exponent întreg. Recapitulare și completări

• Calculați: a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; b) $(1{,}2)^0$; c) 5^{-3}.

Rezolvare:

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$; → $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$

b) $(1{,}2)^0 = 1$; → $a^0 = 1,\ a \in \mathbb{R}^*$

c) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$. → $a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \in \mathbb{R}^*,\ n \in \mathbb{Z}^*$

Definiția puterilor cu exponent întreg

Pentru $a \in \mathbb{R}^*$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}}$.

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{Z}^*$. $a^0 = 1$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Pentru $a = 0$ şi $n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$.

Observație. Expresia 0^0 nu are sens.

Proprietăți ale puterilor cu exponent întreg

Pentru $a, b \in \mathbb{R}^*$, $k, m \in \mathbb{Z}$:

1° $a^k \cdot a^m = a^{k+m}$; 2° $\dfrac{a^k}{a^m} = a^{k-m}$; 3° $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;

4° $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$; 5° $(a^k)^m = a^{k \cdot m}$.

APLICĂM

• Calculați $\dfrac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4}$.

Rezolvare:

$$\frac{3^{-3} \cdot 3^2}{3^4} = 3^{-3+2-4} = 3^{-5} = \frac{1}{3^5} = \frac{1}{243}.$$

• Aduceți la forma cea mai simplă $\left(\dfrac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\dfrac{2a^2}{5b^3}\right)^3$.

Rezolvare:

$$\left(\frac{2a^2}{5b^5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2a^2}{5b^3}\right)^3 = \frac{2^{-2} \cdot a^{-4}}{5^{-2} \cdot b^{-10}} \cdot \frac{2^3 \cdot a^6}{5^3 \cdot b^9} = \frac{2^{-2+3} \cdot a^{-4+6}}{5^{-2+3} \cdot b^{-10+9}} = \frac{2a^2}{5b^{-1}} = \frac{2a^2b}{5}.$$

Exercițiu. Exprimați în cuvinte proprietățile 1°–5°.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Calculați:

a) $\sqrt{10 \cdot 40}$; b) $\sqrt{\dfrac{2}{32}}$; c) $\sqrt{0{,}16 \cdot 25 \cdot 1{,}69}$; d) $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$; e) $\sqrt{3^4}$; f) $\sqrt{\dfrac{2^6}{5^4}}$.

2. Aflați valorile numărului real a pentru care este adevărată egalitatea:

a) $\sqrt{(a-2)^2} = a - 2$; b) $\sqrt{\dfrac{a^2}{4}} = -\dfrac{a}{2}$; c) $\sqrt{\dfrac{3}{a^2 + 2a + 1}} = \dfrac{\sqrt{3}}{a+1}$.

3. Introduceți factorul sub radical:

a) $\dfrac{2}{3}\sqrt{27}$; b) $a\sqrt{3}$, $a < 0$; c) $(b-1)\sqrt{b}$, $b \geq 1$.

4. Scoateți factorul de sub radical:

a) $\sqrt{48}$; b) $\sqrt{98}$; c) $\sqrt{5a^4}$; d) $\sqrt{7(2-a)^2}$, $a<2$.

5. Scrieți ca putere cu baza 10: $1\,000$; 100; 10; 1; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; $0{,}0001$.

6. Calculați:

a) $\frac{3^{-4}}{3^{-7}}$; b) $5^{-11}\cdot 5^9$; c) $\left(\frac{3}{11}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{11}\right)^{-3}$; d) $6^2\cdot 24^{-2}$.

7. Efectuați:

a) $2a^{-3}\cdot 5a^5$; b) $\frac{7x^{-3}}{28x^{-4}}$; c) $\left(\frac{1}{2}b^{-3}\right)^{-2}$; d) $\left(\frac{1}{10}y^2\right)^{-3}$.

Formăm capacitățile și aplicăm

8. Calculați: a) $10\sqrt{1{,}44}+\sqrt{48}-\sqrt{12}-\frac{6}{\sqrt{3}}-5\sqrt{0{,}16}$; b) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}-\frac{1}{\sqrt{7}+2}$.

9. Raționalizați numitorul raportului:

a) $\frac{7}{3\sqrt{21}}$; b) $\frac{6}{5\sqrt{10}}$; c) $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$; d) $\frac{\sqrt{6}}{5-2\sqrt{6}}$; e) $\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$.

10. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\sqrt{3}(\sqrt{12}-2\sqrt{27})$; b) $\sqrt{48}-2\sqrt{3}(2-5\sqrt{12})$;

c) $(3+\sqrt{3})(2+\sqrt{3})$; d) $(\sqrt{6}+\sqrt{5})^2-\sqrt{120}$.

11. Simplificați raportul:

a) $\frac{x^2-5}{x+\sqrt{5}}$; b) $\frac{3+\sqrt{a}}{3\sqrt{a}+a}$; c) $\frac{\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}-1}$; d) $\frac{2\sqrt{7}-7}{\sqrt{7}}$.

12. Calculați:

a) $\frac{6^{-10}}{81^{-2}\cdot 32^{-2}}$; b) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-25}\cdot 25^{-6}\cdot 125^{-4}$; c) $\frac{20^{-4}\cdot 15^{-3}}{30^{-7}}$;

d) $\frac{(-3)^{-4}\cdot 27^{10}}{81^9\cdot 9^{-6}}$; e) $(10^{-2}-1)(10^{-2}+1)$; f) $\frac{(2^3)^5\cdot(2^{-6})^2}{4^2}$.

13. Calculați:

a) $(2{,}5\cdot 10^{-3})\cdot(8{,}4\cdot 10^4)$; b) $(4{,}5\cdot 10^{-2}):(1{,}5\cdot 10^{-3})$;

c) $(3{,}6\cdot 10^5)\cdot[(2{,}4)^{-1}\cdot 10^{-2}]$; d) $(6{,}4\cdot 10^{-4}):(1{,}6\cdot 10^{-3})$.

14. Masa Soarelui este de aproximativ $0{,}2\cdot 10^{31}$ kg. De cîte ori este mai mare masa Soarelui decît masa Pămîntului, dacă se ştie că masa Pămîntului este de aproximativ $0{,}5974\cdot 10^{25}$ kg?

15. Distanța medie de la Pămînt la Soare este de $0{,}1496\cdot 10^9$ km. În cît timp o rază de lumină parcurge această distanță, dacă viteza luminii este de aproximativ $0{,}3\cdot 10^9$ m/s?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

16. Calculați: a) $\sqrt{2{,}5\cdot 10^5}$; b) $\sqrt{4{,}9\cdot 10^{-3}}$; c) $\sqrt{1{,}6\cdot 10^7}$; d) $\sqrt{8{,}1\cdot 10^{-5}}$.

17. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\left(\sqrt{10-\sqrt{19}}+\sqrt{10+\sqrt{19}}\right)^2$; b) $\left(\sqrt{2\sqrt{5}+4}-\sqrt{2\sqrt{5}-4}\right)^2$.

18. a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+\sqrt{6}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{6}}=3$; b) $\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$;

c) $\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$; d) $1-2\sqrt{7}=\sqrt{29-4\sqrt{7}}$.

19. Simplificați raportul ($n \in \mathbb{N}$):

a) $\frac{2^{n+1} \cdot 3^{n-1}}{6^n}$; b) $\frac{14^n}{2^{n-2} \cdot 7^{n+2}}$; c) $\frac{12^n}{3^{n-1} \cdot 2^{2n+1}}$; d) $\frac{2^{2n+1} \cdot 5^{2n-1}}{100^n}$.

20. Aduceți la forma cea mai simplă expresia:

a) $\sqrt{8-\sqrt{15}}$; b) $\sqrt{4+\sqrt{15}}+\sqrt{4-\sqrt{15}}$; c) $\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{4+\sqrt{7}}$.

Indicație. Aplicați formulele radicalilor compuşi:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}, \quad a, b, (a^2-b) \in \mathbb{R}_+.$$

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. Efectuați:

a) $6{,}5 \cdot (1{,}2-4{,}(3)) - 9{,}9 : 3 + 7{,}4 \cdot 5 - 450$; b) $(7-\sqrt{2})(5+\sqrt{3}) - 3\sqrt{6} - 4\sqrt{3} + 10(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

2. 1) Scrieți ca număr zecimal fracția: a) $\frac{16}{23}$; b) $\frac{28}{105}$; c) $\frac{65}{302}$; d) $\frac{178}{6\,004}$.

2) Aflați perioada fiecărui număr zecimal obținut.

3. Comparați:

a) $\sqrt{7}$ şi $\sqrt{10}$; b) $\sqrt{63}$ şi $\sqrt{54}$; c) $\sqrt{23}$ şi $\sqrt{103}$;

d) $\sqrt{17}$ şi 4,5; e) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ şi $\sqrt{7} \cdot \sqrt{5}$; f) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{12}}$ şi $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{5}}$.

4. Explicitați modulul:

a) $|7{,}(5)|$; b) $|-3\sqrt{7}|$; c) $|2-3\sqrt{2}|$; d) $|8-\sqrt{66}|$.

5. Scrieți în ordine crescătoare:

a) $7{,}2(3)$; $\sqrt{7}$; $-3\sqrt{5}$; $7{,}1$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{25}$. b) $4\sqrt{3}$; $2\sqrt{10}$; $5\sqrt{2}$; 7.

6. Utilizînd calculatorul de buzunar, calculați cu aproximație de 0,01:

a) $\sqrt{6}$; b) $\sqrt{11}$; c) $\sqrt{29}$; d) $\sqrt{37}$.

7. Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $a^8 \cdot (a^{-4})^3$, $a \in \mathbb{R}^*$; b) $(c^{-3} \cdot c^8)^{-2}$, $c \in \mathbb{R}^*$; c) $\left(\frac{m^3}{m^{-5}}\right)^{-2} \cdot m^{-4}$, $m \in \mathbb{R}^*$; d) $\left(\frac{3x^3}{x^{-2}}\right)^{-1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

8. Dintr-un număr de două cifre, înmulțit cu un număr de o cifră, se scade un număr de o cifră şi se obține 1. Care sînt aceste numere?

9. Alina avea o bancnotă de 50 lei, una de 10 lei, două de 1 leu şi 3 monede de 50 bani. După ce a făcut cumpărături, i-au rămas 20% din întreaga sumă. Cît a cheltuit Alina?

Formăm capacitățile și aplicăm

10. Scrieți ca sumă, diferență, produs şi cît de două numere reale, diferite de 0 şi 1, numărul:

a) $-2\sqrt{11}$; b) $2-\sqrt{3}$; c) $1+3\sqrt{7}$; d) $7\sqrt{13}$.

11. Efectuați:

a) $(3-2\sqrt{5})^2$; b) $(2+\sqrt{7})^2$; c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3$; d) $(5+\sqrt{5})^3$.

12. Calculați cu aproximație de 0,1 soluțiile ecuației:
a) $3x^2 - x - 1 = 0$; b) $-x^2 + 5x - 1 = 0$; c) $4x^2 - x - 2 = 0$; d) $x^2 - 3x - 8 = 0$.

13. Explicitați modulul:
a) $|1 - 3\sqrt{3}|$; b) $|-7 + \sqrt{16}|$; c) $|-(3 - \sqrt{5})|^2$; d) $|2\sqrt{3} - 3\sqrt{2}|$.

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $|x^2 - 3x + 1| = 5$; b) $|2x^2 - x + 2| = 2$; c) $|4x^2 - 7| = 9$; d) $|x - 2x^2| = 3$.

15. Comparați numerele:
a) $5 - 2\sqrt{3}$ ▢ $2 + \sqrt{2}$; b) $6 + \sqrt{7}$ ▢ $4\sqrt{7}$.

16. Reprezentați pe axa numerelor mulțimea:
a) $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x| \le \sqrt{5}\}$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x + 1| < \sqrt{3}\}$; c) $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, |x - 3| \ge 1{,}5\}$.

17. Scrieți ca fracție numărul zecimal:
a) 6,(7); b) 15,(25); c) 3,2(17); d) 0,123(7).

18. Aduceți la forma cea mai simplă:
a) $\sqrt{16x^2}$, dacă $x < 0$; b) $\sqrt{0{,}81a^2b^2}$, dacă $a > 0$, $b < 0$;
c) $\sqrt{24m^3n^2}$, dacă $n > 0$; d) $\sqrt{8x^4y^6}$, dacă $y < 0$.

19. Calculați:
a) $\dfrac{6{,}6 \cdot 10^5}{1{,}1 \cdot 10^{-7}}$; b) $\dfrac{5{,}6 \cdot 10^{-2}}{7 \cdot 10^{-3}}$; c) $\dfrac{1{,}9 \cdot 10^{-5}}{3{,}8 \cdot 10^{-4}}$.

20. Dintr-o foaie de tablă de formă pătrată s-a tăiat o fâșie cu lățimea de 25 cm. Aflați dimensiunile inițiale ale foii de tablă, dacă se știe că aria părții rămase după tăiere este de $4\,400\ \text{cm}^2$.

21. Tatăl îi spune fiului: „10 ani în urmă eu eram de 10 ori mai în vîrstă decît tine, iar peste 22 de ani voi fi numai de două ori mai în vîrstă.” Cîți ani are acum tatăl și cîți fiul?

22. Determinați probabilitatea obținerii unui multiplu al lui 2 la aruncarea unui zar.

23. O cărămidă are masa de 1,5 kg și încă a unei jumătăți de aceeași cărămidă. Care este masa cărămizii?

24. Un pepene verde are masa de 3,5 kg și încă a unei jumătăți de același pepene. Care este masa pepenelui?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

25. Reprezentați geometric pe axa numerelor punctele: $A(\sqrt{5} + 1)$, $B(2 + \sqrt{3})$, $C(\sqrt{3} - \sqrt{2})$, $D(\sqrt{7} - 4)$.

26. Efectuați: a) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + \sqrt{5})^2$; b) $(2\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - \sqrt{2})^2$.

27. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $|x|(|x| - 3) = 5$; b) $x^2 - |x| - 2 = 0$; c) $\sqrt{(3 - x)^2} = 3 - |3 - x|^2$;
d) $(|x| - 3)(|x| + 5) - 1 = 0$; e) $\sqrt{(x + 4)^2} = 5 - |4 + x|^2$.

28. Aduceți la forma cea mai simplă:
a) $(x^{-2} - y^{-2}) : (x^{-1} + y^{-1})$, $x, y \in \mathbb{R}^*$; b) $(a + b)^{-2} \cdot (a^{-2} - b^{-2})$, $a, b \in \mathbb{R}^*$.

29. Cu ce este egală: a) diferența $|a| - a$, $a \in \mathbb{R}$; b) suma $|a| + a$, $a \in \mathbb{R}$?

30. Demonstrați că: a) produsul oricăror trei numere naturale consecutive se divide cu 6;
b) produsul a două numere pare consecutive este multiplu al lui 8.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. Fie $A=\{-3;\ 0;\ 5,(4);\ |\pi-4|;\ 7;\ \sqrt{4};\ \sqrt{5}\}$.

a) Completați caseta: card $A=$ ▭. **1 p**

b) Aflați: $A\cap\mathbb{N}$; $A\cap\mathbb{Z}$; $A\cap\mathbb{Q}$. **3 p**

c) Ordonați crescător elementele mulțimii A. **5 p**

d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: **8 p**

$$[18:(-3)^3-7^{-2}\cdot 5,(4)]\cdot(x-1)=\sqrt{4}+2x.$$

2. Fie expresia $E=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{4})^2}+\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{4})^2}+2(\sqrt{5}-2)$.

a) Aflați valoarea expresiei E. **8 p**

b) Aflați inversul numărului obținut în a). **3 p**

3. Alisia are o bancnotă de 100 lei, două bancnote de 50 lei, una de 20 lei, trei de 10 lei şi patru de 1 leu. După ce a achitat cumpărătura, Alisiei i-au rămas 12% din suma inițială.

a) Scrieți în casetă „>” sau „<” pentru a obține o propoziție adevărată: **1 p**

Suma inițială ▭ *210 lei.*

b) Calculați cît a cheltuit Alisia. **5 p**

c) Aflați ce sumă ar trebui să cheltuiască Alisia, astfel încît să-i rămînă 20% din suma inițială. **4 p**

Varianta II

1. Fie $B=\{|3-\pi|;\ -5;\ 0;\ \sqrt{9};\ 8,(3);\ -\pi;\ 6\}$.

a) Completați caseta: card $B=$ ▭.

b) Aflați: $B\cap\mathbb{N}$; $B\cap\mathbb{Z}$; $B\cap\mathbb{Q}$.

c) Ordonați descrescător elementele mulțimii B.

d) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$[(-5)^2:8,(3)-6^{-2}\cdot 18]\cdot(x+1)=\sqrt{9}-3x.$$

2. Fie expresia $E=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{(\sqrt{4}-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-\sqrt{5})^2}-2(\sqrt{5}-1)$.

a) Aflați valoarea expresiei E.

b) Aflați inversul numărului obținut în a).

3. Amelia are o bancnotă de 200 lei, două bancnote de 100 lei, una de 50 lei, patru de 5 lei şi trei de 1 leu. După ce a achitat facturile de întreținere şi utilități, Ameliei i-au rămas 20% din suma inițială.

a) Scrieți în casetă „>” sau „<” pentru a obține o propoziție adevărată:

Suma inițială ▭ *620 lei.*

b) Calculați cît a achitat Amelia pentru întreținere şi utilități.

c) Aflați ce sumă ar trebui să plătească Amelia pentru întreținere şi utilități, astfel încît să-i rămînă 15% din suma inițială.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	38–37	36–33	32–29	28–23	22–17	16–12	11–8	7–5	4–3	2–0

Capitolul 2

Funcții

§ 1. Noțiunea de funcție. Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de funcție. Moduri de definire a funcției

• Identificați elementele funcției:

a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \; \underbrace{f(x) = -3x + 1}.$

$D(f)$ – domeniul de definiție al funcției f

Domeniul de valori sau codomeniul funcției f

Legea de corespondență

$E(f) = \{y \mid y = f(x) = -3x + 1\}$ – mulțimea valorilor funcției f

b) $g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}, \; \underbrace{f(x) = 8{,}5x - 3}.$

$E(g) =$

Definiție

Fie mulțimile nevide A și B. Se spune că este definită **o funcție** pe mulțimea A cu valori în mulțimea B dacă este stabilită o lege de corespondență, o regulă, un procedeu care asociază *fiecărui* element x din A un *singur* element y din B.

Funcția definită pe mulțimea A cu valori în mulțimea B se notează $f: A \to B$ (sau $A \xrightarrow{f} B$).

Mulțimea A se numește ***domeniul de definiție*** al funcției f și se notează $D(f)$.

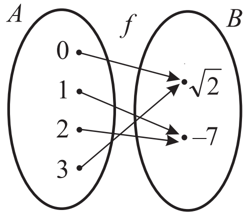
Mulțimea B se numește ***domeniul de valori*** sau ***codomeniul*** funcției f.

Valoarea funcției f în x se notează $y = f(x)$; x se numește ***variabilă independentă*** sau ***argument*** al funcției f, iar y – ***variabilă dependentă***.

Mulțimea valorilor funcției f se notează $E(f) = \{y \mid y = f(x)\}$.

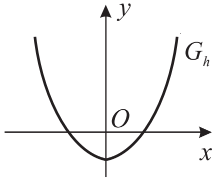
Evident, $E(f) \subseteq B$.

• Fie funcțiile f, g, h, p (fig. 1). Identificați modul de definire a fiecărei funcții.

a) 

b)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = g(x)$	–6	–4	–2	0	2	4	6

c) 

d) $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ p(x) = x^2 + 2.$

Fig. 1

GENERALIZĂM

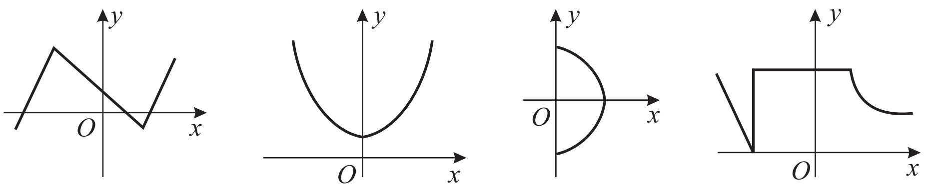
Moduri de definire a funcției

I. Modul analitic: prin formule.

II. Modul sintetic: printr-o diagramă, printr-un tabel de valori, printr-un grafic.

1.2. Graficul unei funcții

• Examinați desenele din figura 2 și identificați care dintre ele reprezintă graficul unei funcții. Argumentați.



a) b) c) d)

Fig. 2

Definiție

Se numește **graficul funcției** $f\colon A \to B$ mulțimea $G_f = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y = f(x)\}$ sau reprezentarea acestei mulțimi într-un sistem de axe ortogonale.

Așadar, graficul funcției f este o submulțime a produsului cartezian $A \times B$ sau reprezentarea acestei submulțimi într-un sistem de axe ortogonale.

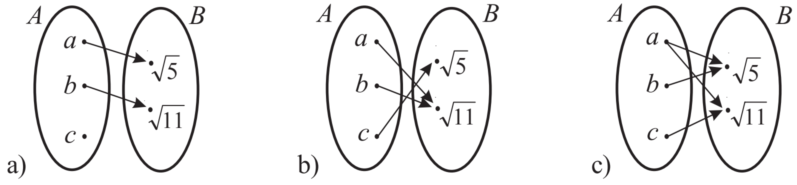
Ecuația $y = f(x)$, verificată de toate elementele $(x, y) \in G_f$, se mai numește ***ecuația graficului*** funcției f.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

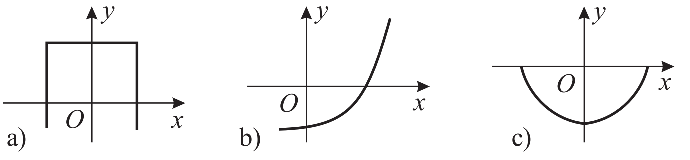
1. Citiți: a) $f\colon \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{Z}$; b) $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$; c) $h\colon \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$; d) $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$.

2. Precizați care dintre diagrame definește o funcție.



3. Determinați elementele funcției:
a) $f\colon \{-1, 0, 2, 3\} \to \{-3, -2, 0, 1\}$, $f(x) = -x$; b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 5x + 12$.

4. Determinați care dintre desene nu reprezintă graficul unei funcții.



Formăm capacitățile și aplicăm

5. Fie mulțimile $A = \{-\sqrt{5}, -3, 0, 2\}$ și $B = \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$.
a) Reprezentați prin diagrame toate funcțiile definite pe A cu valori în B.
b) Trasați graficele funcțiilor obținute la a), completînd tabelele de valori respective.

6. Determinați dacă este corect definită funcția:
a) $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $f(x) = 2x^2 - 1$; b) $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = -\dfrac{5}{x}$;
c) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = \dfrac{2}{3}x + 4$; d) $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$.

7. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, \text{ dacă } x \le -1 \\ 5 - 3x, \text{ dacă } x > -1. \end{cases}$

Calculați $f(-\sqrt{2})$, $f(-0{,}1)$, $f(0)$, $f(2\sqrt{5})$.

8. Exprimați printr-o formulă funcția:
$f\colon \{1, 2, 3, 4, 5\} \to \mathbb{N}$, $f(1) = 4$, $f(2) = 7$, $f(3) = 10$, $f(4) = 13$, $f(5) = 16$.

9. Una din bazele unui trapez isoscel este congruentă cu latura laterală, iar măsura unghiului alăturat bazei este de $30°$. Exprimați printr-o formulă perimetrul trapezului ca funcție de înălțime.

10. Dați exemple de funcții din diverse domenii (viața de zi cu zi, fizică, chimie, economie, medicină, geometrie, istorie etc.).

Dezvoltăm capacitățile și creăm

11. Fie funcția $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(n) =$ restul împărțirii numărului n la 5.
a) Calculați $f(0)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(5)$, $f(7)$. b) Arătați că $f(n + 5) = f(n)$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

12. Între variabilele $x, y \in \mathbb{R}$ există relația: a) $3x - y = 7$; b) $x^2 + 3y^2 = 8$.
Se poate exprima y ca funcție de x? Dar x ca funcție de y?

§ 2. Funcții numerice. Recapitulare și completări

2.1. Proprietăți ale funcțiilor numerice

2.1.1. Monotonia funcțiilor numerice

Definiție

Funcția $f\colon A \to B$ se numește **funcție numerică** sau **funcție reală de variabilă reală** dacă A și B sînt submulțimi ale mulțimii numerelor reale $\mathbb{R}$.

Exemplu

$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, $f(x) = 0{,}5x - 1$; $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 3x$; $h\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -\sqrt{2}x^3$, sînt funcții numerice.

Fie funcția numerică $f\colon A \to \mathbb{R}$, unde $A \subseteq \mathbb{R}$ și $x_1, x_2 \in A$.

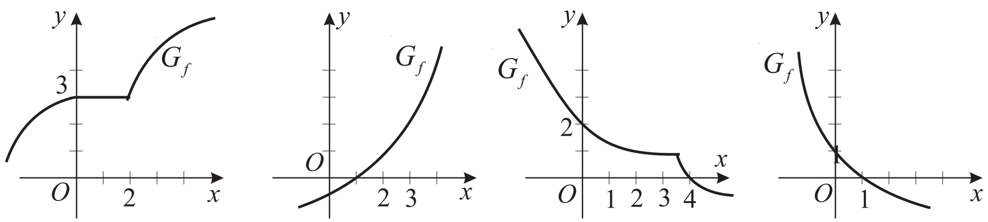
Definiții

♦ Funcția f se numește **crescătoare** (**strict crescătoare**) pe mulțimea A, dacă pentru orice $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$ avem $f(x_1) \le f(x_2)$ $((f(x_1) < f(x_2))$.

♦ Funcția f se numește **descrescătoare** (**strict descrescătoare**) pe mulțimea A, dacă pentru orice $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in A)$ avem $f(x_1) \ge f(x_2)$ $((f(x_1) > f(x_2))$.

♦ Funcția f se numește **monotonă** (**strict monotonă**) pe domeniul ei de definiție $D(f)$ sau pe un interval $I \subseteq D(f)$, dacă ea este crescătoare sau descrescătoare (strict crescătoare sau strict descrescătoare) pe $D(f)$ sau pe I (fig. 3).

Exemple



a) funcție crescătoare

b) funcție strict crescătoare

c) funcție descrescătoare

d) funcție strict descrescătoare

Fig. 3

APLICĂM

• Examinați graficul G_f al funcției f și precizați intervalele ei de monotonie (fig. 4).

Rezolvare:

Funcția f este ________ pe $(-\infty, 1]$, $[3, +\infty)$ și ________ pe $[1, 3]$.

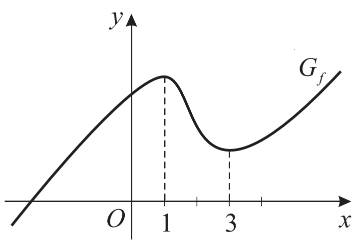


Fig. 4

2.1.2. *Zeroul funcției*

• Examinați graficul G_f al funcției f și determinați zerourile acestei funcții (fig. 5).

Rezolvare:

Cum graficul G_f intersectează axa Ox în punctul $A(-3, 0)$, rezultă că $x_1 = -3$ este zeroul funcției f. Deoarece $B(2, 0)$ este punct comun al graficului G_f cu axa Ox, adică $f(2) = 0$, rezultă că $x_2 = 2$ este zeroul funcției f.

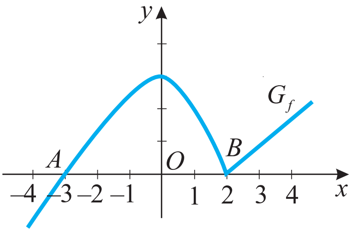


Fig. 5

Răspuns: Funcția f are două zerouri: ____ și ____.

Definiție

Numărul real a se numește **zeroul funcției** f dacă $f(a) = 0$.

Numărul real a este zerou al funcției f dacă și numai dacă punctul $(a, 0)$ este situat pe graficul G_f.

2.2. Funcția numerică $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$

Definiții

♦ Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ se numește **funcție de gradul I**.

♦ Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax, a \in \mathbb{R}, a \neq 0,$ se numește **proporționalitate directă** sau **funcție liniară**.

♦ Numărul real a se numește **coeficient de proporționalitate**.

♦ Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = b, b \in \mathbb{R},$ se numește **funcție constantă**.

Observație. Proporționalitatea directă dintre mărimi este funcția de forma $f: (0, +\infty) \to (0, +\infty), f(x) = ax, a \in \mathbb{R}_+^*$.

2.2.1. *Graficul funcției de forma* $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$

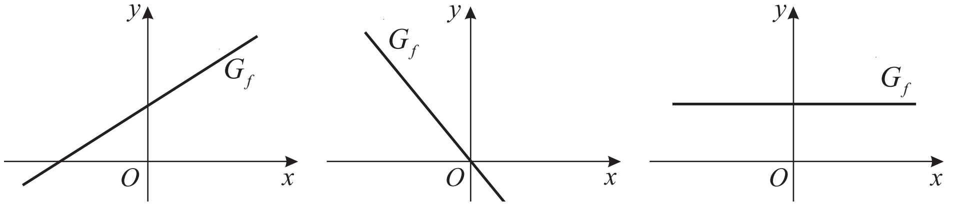
Graficul funcției de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R},$ reprezintă o dreaptă:

- care nu trece prin origine și nu este paralelă cu axa Ox, dacă $a \neq 0, b \neq 0$ (fig. 6 a));
- care trece prin originea $O(0, 0)$, dacă $b = 0$ (fig. 6 b));
- paralelă cu axa Ox, dacă $a = 0, b \neq 0$, sau axa Ox, dacă $a = 0, b = 0$ (fig. 6 c)).

Numărul a se numește ***panta*** (***coeficientul unghiular*** al) dreptei – graficul funcției de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}$.

Pentru a construi dreapta – graficul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R}$, este suficient să se construiască dreapta determinată de două puncte ale graficului funcției f. De regulă, acestea sînt punctele de intersecție a graficului G_f cu axele Ox şi Oy.

Pentru funcția liniară $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, se determină convenabil un punct şi se construieşte dreapta ce trece prin originea $O(0, 0)$ şi acest punct.



a) b) c)

Fig. 6

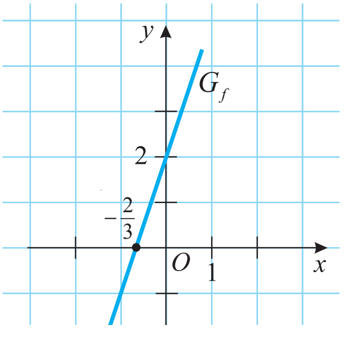


Fig. 7

2.2.2. Proprietăți ale funcției de forma $\boldsymbol{f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R}}$

• Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=3x+2$ (fig. 7).

1) Precizați monotonia funcției f.

2) Aflați zeroul funcției f.

3) Determinați semnul funcției f.

Rezolvare:

Fie $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ şi $x_1<x_2$.

1) $x_1<x_2 \Leftrightarrow 3x_1<3x_2 \Leftrightarrow 3x_1+2<3x_2+2 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ pentru orice $x_1, x_2\in\mathbb{R}$. Prin urmare, funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Constatăm că $a=3>0$.

2) $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x+2=0 \Leftrightarrow x=-\frac{2}{3}$. Aşadar, $x=-\frac{2}{3}$ este zeroul funcției f.

3) $f(x)>0 \Leftrightarrow 3x+2>0 \Leftrightarrow x>-\frac{2}{3}$; $f(x)<0 \Leftrightarrow x<-\frac{2}{3}$. Prin urmare, funcția f ia valori negative pentru $x\in\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right)$ şi valori pozitive pentru $x\in\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

GENERALIZĂM

Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R}$.

- Dacă $a=0$, funcția f este constantă pe $\mathbb{R}$.
- Dacă $a>0$, funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.
- Dacă $a<0$, funcția f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.
- Zeroul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, este $x=-\frac{b}{a}$.
- Intervalul pe care funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax+b,\ a, b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, ia valori pozitive este mulțimea soluțiilor inecuației $ax+b>0$, iar intervalul pe care funcția f ia valori negative este mulțimea soluțiilor inecuației $ax+b<0$.

2.3. Funcția numerică $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{k}{x},\ k \in \mathbb{R}^*$

Dependența dintre două mărimi x şi y, astfel încît, odată cu majorarea (micşorarea) mărimii x, mărimea y se micşorează (majorează) tot de atîtea ori, se numeşte ***proporționalitate inversă***.

Proporționalitatea inversă dintre mărimile x şi y este exprimată prin relația $x \cdot y = k$, unde $k \in \mathbb{R}_+^*$ şi $x \in (0, +\infty)$.

Definiție

Funcția de forma $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{k}{x},\ k \in \mathbb{R}^*$, se numeşte **proporționalitate inversă**.

Graficul proporționalității inverse este o hiperbolă cu două ramuri:

a) pentru $k > 0$ ramurile ei sînt situate în cadranele I şi III (fig. 8);

b) pentru $k < 0$ ramurile ei sînt situate în cadranele II şi IV (fig. 9).

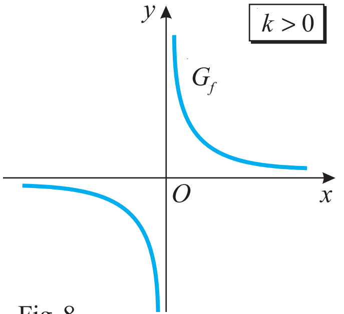


Fig. 8

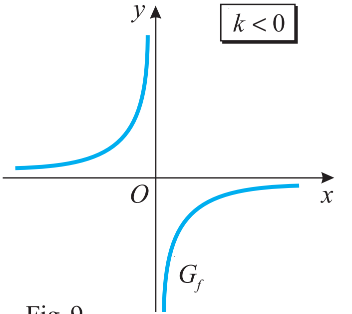


Fig. 9

Proprietăți ale funcției de forma $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = \dfrac{k}{x},\ k \in \mathbb{R}^*$

1° Funcția f nu are zerouri; graficul G_f nu intersectează nici axa Ox, nici axa Oy.

2° a) Pentru $k > 0$ funcția f ia valori pozitive, dacă $x \in (0, +\infty)$, şi valori negative, dacă $x \in (-\infty, 0)$.

b) Pentru $k < 0$ funcția f ia valori pozitive, dacă $x \in$ ______, şi valori negative, dacă $x \in$ ______.

3° a) Pentru $k > 0$ funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$.

b) Pentru $k < 0$ funcția f este strict crescătoare pe ______, ______.

4° Pentru $k > 0$ $(k < 0)$ observăm: pentru valori ale lui x, pozitive sau negative, din ce în ce mai mari, funcția f ia valori din ce în ce mai mici (mari); pentru valori negative ale lui x din ce în ce mai mici, funcția f ia valori din ce în ce mai mari (mici); pentru valori pozitive ale lui x din ce în ce mai mici, funcția f ia valori din ce în ce mai mari (mici).

5° Observăm că $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

Într-adevăr, $f(-x) = \dfrac{k}{-x} = -\dfrac{k}{x} = -f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$.

Cum $f(-x) = -f(x)$, rezultă că dacă punctul $A(x_0, y_0) \in G_f$, atunci şi punctul $A'(-x_0, -y_0) \in G_f$. Deci, graficul G_f este simetric față de originea $O(0, 0)$ (fig. 8, fig. 9).

2.4. Funcția radical $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$

Definiție

Funcția $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x)=\sqrt{x}$, se numeşte **funcție radical**.

Graficul funcției radical este o curbă situată în cadranul I (fig. 10).

Proprietăți ale funcției radical

1° Funcția f are un singur zerou, $x=0$, deoarece $f(x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x}=0 \Leftrightarrow x=0$.

Graficul G_f intersectează axele Ox şi Oy într-un singur punct: $O(0, 0)$.

2° Funcția f ia numai valori pozitive pentru $x \in \mathbb{R}_+^*$.

3° Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}_+$.

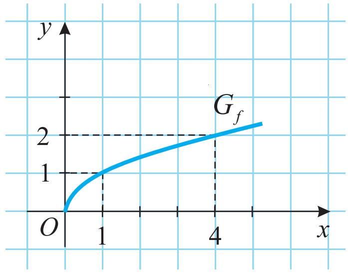


Fig. 10

2.5. Funcția modul (opțional)

Definiție

Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=|x|$, se numeşte **funcție modul**.

INVESTIGĂM

• Fie funcția modul $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x)=|x|$.
 a) Trasați graficul G_f.
 b) Determinați proprietățile funcției f.

Rezolvare:

a) Explicitînd modulul, obținem: $f(x)=|x|=\begin{cases} x, \text{ dacă } x\in[0, +\infty) \\ -x, \text{ dacă } x\in(-\infty, 0). \end{cases}$

Prin urmare, pentru $x\in[0, +\infty)$ trasăm graficul funcției $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R},\ f(x)=x$, iar pentru $x\in(-\infty, 0)$ – graficul funcției $f: (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$, $f(x)=-x$.

Graficul funcției $f(x)=|x|$ este un unghi de $90°$ cu vîrful în originea sistemului de axe ortogonale, astfel încît $[Oy$ este bisectoarea acestuia (fig. 11).

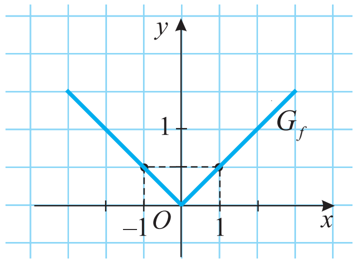


Fig. 11

b) ***Proprietăți ale funcției modul***

1° $f(x)=0 \Leftrightarrow |x|=0 \Leftrightarrow x=0$. Prin urmare, funcția f are un singur zerou: $x=0$.

2° Deoarece $|x|\geq 0$, rezultă că pentru $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ funcția f ia valori pozitive.

3° Funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ şi strict crescătoare pe $[0, +\infty)$. (Demonstrați!)

APLICĂM

• Trasați graficul funcției
$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = -|3-x|$.

Rezolvare:

Explicitînd modulul, obținem:

$$h(x) = -|3-x| = \begin{cases} x-3, \text{ dacă } x \in (-\infty, 3] \\ 3-x, \text{ dacă } x \in (3, +\infty). \end{cases}$$

Graficul funcției h este reprezentat în figura 12.

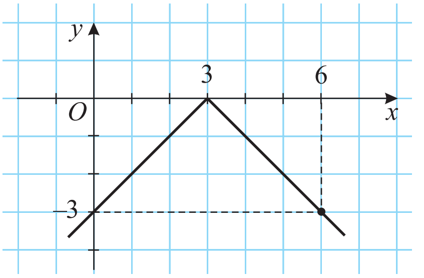


Fig. 12

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie punctele: $(1, 0)$; $(1, 1)$; $(-2, -11)$; $(-2, 10)$; $(-3, 16)$.
Determinați care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 4x-3$; b) $f(x) = -3x+4$; c) $f(x) = -5x+1$.

2. Fie funcția: 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 0{,}5x-4$; 2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x+5$.
a) Reprezentați grafic funcția f.
b) Aflați zeroul funcției f.
c) Precizați semnul funcției f.
d) Precizați monotonia funcției f.

3. Fie funcția: 1) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -0{,}25x$; 2) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 7x$.
a) Reprezentați grafic funcția g.
b) Aflați zeroul funcției g.
c) Precizați semnul funcției g.
d) Precizați monotonia funcției g.

4. Determinați, fără a reprezenta grafic funcția, dacă este crescătoare sau descrescătoare funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin formula:
a) $f(x) = \sqrt{15}x+3$; b) $f(x) = -\sqrt{3}x-5$; c) $f(x) = -x$; d) $f(x) = 7,(8)x$.

5. Determinați, fără a reprezenta graficul funcției, în care cadrane sînt situate ramurile hiperbolei – graficul funcției $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$:
a) $f(x) = \frac{1}{x}$; b) $f(x) = -\frac{2}{3x}$; c) $f(x) = -\frac{\sqrt{7}}{x}$; d) $f(x) = -\frac{1+\sqrt{19}}{x}$.

6. Fie funcția radical $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$, și $x \in \{4, 7, 9, 25, -36, 0, -49\}$.
Aflați valorile respective ale funcției f.

7. Completați formula cu un număr real, astfel încît funcția obținută $f: D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \square\, x-1$; b) $f(x) = -\square\, x+3$; c) $f(x) = \frac{\square}{x}$; d) $f(x) = -\frac{\square}{x}$
să fie: 1) strict crescătoare pe mulțimea D; 2) strict descrescătoare pe mulțimea D.

Formăm capacitățile și aplicăm

8. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -3x+b$, pentru: a) $b=-1$; b) $b=0$; c) $b=2$. Ce ați observat?

9. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -4x$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 4x$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x-1$, și $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = 1-2x$.
Ce ați observat?

10. Determinați funcția de gradul I, știind că:

a) $f(1)=4$ și $f(0)=-3$; b) $f(0)=2$ și $f(-2)=5$;

c) $f(\sqrt{2})=2-\sqrt{3}$ și $f(2\sqrt{6})=3\sqrt{3}$; d) $f(-1)=3$ și $f(2)=-1$.

11. Reprezentați grafic funcția $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$:

a) $f(x)=-\frac{3}{x}$; b) $f(x)=\frac{3}{4x}$; c) $f(x)=-\frac{1}{2x}$; d) $f(x)=\frac{5}{x}$.

Determinați proprietățile funcției f.

12. Reprezentați graficul funcției $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=2\sqrt{x}$; b) $f(x)=\sqrt{x}-1$; c) $f(x)=\sqrt{x}+1$; d) $f(x)=0{,}5\sqrt{x}$.

13. Formulați exemple de dependențe funcționale din viața cotidiană.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

14. Fie m un parametru real și funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=(m-2)x+4$; b) $f(x)=(m+4)x+m-6$.

Aflați valorile lui m pentru care funcția f este: 1) crescătoare; 2) descrescătoare.

15. Reprezentați grafic funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{|x|}$; b) $f(x)=\sqrt{|x-2|}$; c) $f(x)=\begin{cases} -x, & \text{dacă } x \le 0 \\ \sqrt{x}, & \text{dacă } 0 < x \le 4 \\ 2, & \text{dacă } x > 4. \end{cases}$

16. Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\setminus\{3\} \to \mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+4}{x-3}$.

Arătați că există $A, B \in \mathbb{R}$, astfel încît $f(x)=A+\frac{B}{x-3}$.

17. Formulați și rezolvați cîte un exercițiu asemănător cu exercițiile **9**, **10**, **14**, **16**.

• *Problemă pentru campioni* **18.** Scrieți o funcție de argument natural, definită cu ajutorul unei formule, ale cărei valori să fie numere prime pentru orice valoare a argumentului.

• *Lucrare practică* Observați, pe parcursul unei săptămîni, cum se schimbă zi de zi, la aceeași oră, temperatura aerului în localitatea voastră. Reprezentați grafic rezultatele obținute. Determinați prin formule funcțiile asociate fiecărei porțiuni de grafic.

§ 3. Funcția de gradul II

3.1. Funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$

INVESTIGĂM

• Fie un pătrat cu latura a (fig. 13). Construiți o funcție care să descrie dependența ariei pătratului de lungimea laturii sale.

Rezolvare:

Aria unui pătrat cu lungimea laturii a este $\mathscr{A}=a^2$. Prin urmare, dependența ariei pătratului de lungimea laturii sale este descrisă de funcția $g\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $g(x)=x^2$.

Funcția g ne conduce la funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

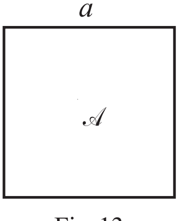


Fig. 13

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

a) Reprezentați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

b) Determinați proprietățile funcției f.

Rezolvare:

a) Completăm tabelul de valori al funcției f pentru valoarea zero, unele valori negative şi pozitive ale argumentului x:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	0	1	4	9

Reprezentăm într-un sistem de axe ortogonale xOy punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabel. Unim aceste puncte cu o curbă continuă şi obținem graficul G_f (fig. 14).

Graficul G_f al funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$, se numeşte ***parabolă***.

Punctul $O(0, 0)$ se numeşte ***vîrful parabolei***.

Se spune că această parabolă este cu *ramurile în sus*.

Atenție! La trasarea parabolei am ținut cont de faptul că nu există trei puncte distincte coliniare situate pe parabolă.

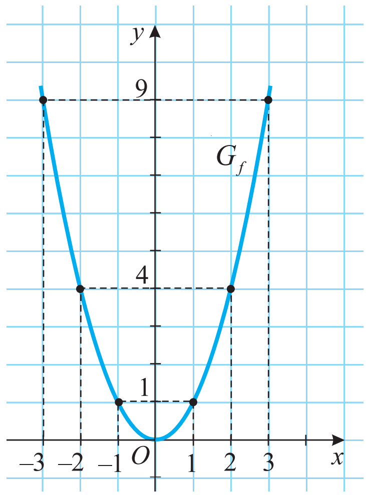


Fig. 14

b) ***Proprietăți ale funcției*** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Prin urmare, $x = 0$ este zeroul funcției f.

Graficul G_f intersectează axele Ox şi Oy într-un singur punct: $O(0, 0)$.

2° $f(x) = x^2 \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Aşadar, funcția f ia numai valori nenegative.

3° Funcția f este strict crescătoare pe $[0, +\infty)$ şi strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$.

4° Remarcăm că $f(-x) = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Într-adevăr, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Atunci $(x, y) \in G_f \Leftrightarrow (-x, y) \in G_f$, ceea ce înseamnă că graficul G_f este simetric față de axa Oy sau că graficul G_f admite axa Oy drept axă de simetrie (fig. 14).

APLICĂM

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$.

Aflați valorile lui x pentru care valoarea funcției $f(x)$ este: a) 64; b) 0; c) –25.

Rezolvare:

a) $f(x) = 64 \Leftrightarrow x^2 = 64$. Aşadar, $x_1 = -8,\ x_2 = 8$.

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$. Prin urmare, $x = 0$.

c) $f(x) = -25 \Leftrightarrow x^2 = -25$. Deci, nu există astfel de valori reale ale lui x.

3.2. Funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}^*$

INVESTIGĂM

• Fie un disc de rază R (fig. 15). Construiți o funcție care să descrie dependența ariei discului de lungimea razei lui.

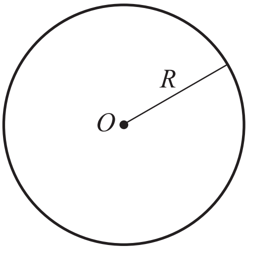


Fig. 15

Rezolvare:

Aflăm aria discului aplicînd formula $\mathcal{A} = \pi R^2$.
Prin urmare, dependența ariei discului de lungimea razei acestuia este descrisă de funcția $h\colon (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $h(x) = \pi x^2$.

Funcția h ne conduce la funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}^*$.

• Fie funcția:

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$;

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -2x^2$.

1) Trasați graficele funcțiilor f şi g.

2) Determinați proprietățile funcțiilor f şi g.

Rezolvare:

1) Completăm tabelele de valori ale funcțiilor f şi g pentru valoarea zero, unele valori negative şi pozitive ale argumentului x:

a)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x) = 2x^2$	8	2	0	2	8

b)

x	–2	–1	0	1	2
$g(x) = -2x^2$	–8	–2	0	–2	–8

Graficele G_f şi G_g, trasate „prin puncte”, sînt reprezentate în figura 16 şi respectiv 17. Graficul funcției f, precum şi graficul funcției g, se numeşte ***parabolă***.

Punctul $O(0,0)$ se numeşte ***vîrful parabolei***.

Se spune că graficul funcției f este o *parabolă cu ramurile în sus*, iar graficul funcției g – o *parabolă cu ramurile în jos*.

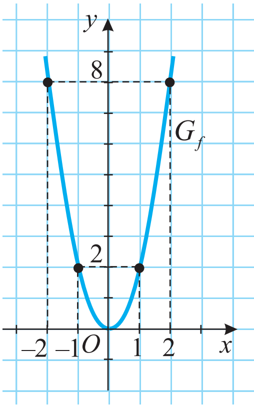


Fig. 16

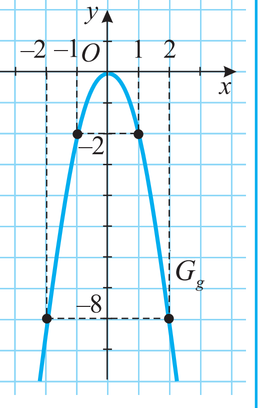


Fig. 17

2) ***Proprietăți ale funcției***

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$	$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -2x^2$
1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ Deci, funcția f are un zerou: $x = 0$. Prin urmare, graficul G_f intersectează axele *Ox* și *Oy* în punctul *O*(0, 0).	1° $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ Deci, funcția *g* are un zerou: $x = 0$. Prin urmare, graficul G_g intersectează axele *Ox* și *Oy* în punctul *O*(0, 0).
2° $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \geq 0$. Deci, funcția f ia valori nenegative pentru orice $x \in \mathbb{R}$.	2° $g(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2x^2 \leq 0$. Deci, funcția *g* ia valori negative sau zero pentru orice $x \in \mathbb{R}$.
3° Funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.	3° Funcția *g* este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe $[0, +\infty)$.
4° $D(f) = \mathbb{R}$. Deci, din $x \in D(f)$ rezultă că și $-x \in D(f)$. Cum $f(-x) = 2 \cdot (-x)^2 = 2x^2 = f(x)$, rezultă că G_f este simetric față de axa *Oy*.	4° $D(g) = \mathbb{R}$. Deci, din $x \in D(g)$ rezultă că și $-x \in D(g)$. Cum $g(-x) = -2 \cdot (-x)^2 = -2x^2 = g(x)$, rezultă că G_g este simetric față de axa *Oy*.
5° Punctul $x_0 = 0$ este punct de minim al funcției f și $f(x_0) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$.	5° Punctul $x_0 = 0$ este punct de maxim al funcției *g* și $g(x_0) = \max\limits_{x \in \mathbb{R}} g(x) = 0$.

Definiții

Fie $f: A \to \mathbb{R},\ A \subseteq \mathbb{R}$, și $x_0 \in A$.

♦ Valoarea $f(x_0)$ se numește **valoarea minimă** a funcției f pe mulțimea *A*, dacă $f(x) \geq f(x_0)$ pentru orice $x \in A$. Se notează: $f(x_0) = \min\limits_{x \in A} f(x)$. În acest caz se spune că x_0 este **punct de minim** al funcției f.

♦ Valoarea $f(x_0)$ se numește **valoarea maximă** a funcției f pe mulțimea *A*, dacă $f(x) \leq f(x_0)$ pentru orice $x \in A$. Se notează: $f(x_0) = \max\limits_{x \in A} f(x)$. În acest caz se spune că x_0 este **punct de maxim** al funcției f.

♦ Punctele de minim și de maxim se numesc **puncte de extrem** ale funcției f, iar valorile funcției f în aceste puncte se numesc **valori extreme** ale funcției f.

Proprietăți ale funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2,\ a \in \mathbb{R}^*$

1° Graficul G_f este o parabolă cu vîrful în originea *O*(0, 0) și:
   a) are ramurile în sus, dacă $a > 0$;
   b) are ramurile în jos, dacă $a < 0$.
   Graficul G_f intersectează axele *Ox* și *Oy* într-un singur punct: *O*(0, 0).

2° Funcția f are un zerou: $x = 0$.

3° Funcția f ia valori nenegative, dacă $a>0$, și valori negative sau zero, dacă $a<0$.

4° a) Pentru $a>0$ funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe $[0, +\infty)$.

b) Pentru $a<0$ funcția f este strict crescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict descrescătoare pe $[0, +\infty)$.

5° a) Dacă $a>0$, atunci $f(0)=\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=0$ și $x_0=0$ este punct de minim al funcției f.

b) Dacă $a<0$, atunci $f(0)=\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=0$ și $x_0=0$ este punct de maxim al funcției f.

6° G_f este simetric față de axa Oy.

APLICĂM

• Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:

a) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x^2$, și $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x^2$;

b) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-0{,}5x^2$, și $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=-x^2$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor f și g:

a)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)=2x^2$	8	2	0	2	8
$g(x)=x^2$	4	1	0	1	4

b)

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)=-0{,}5x^2$	–2	–0,5	0	–0,5	–2
$g(x)=-x^2$	–4	–1	0	–1	–4

Graficele funcțiilor f și g sînt reprezentate în figura 18 și respectiv 19.

a)

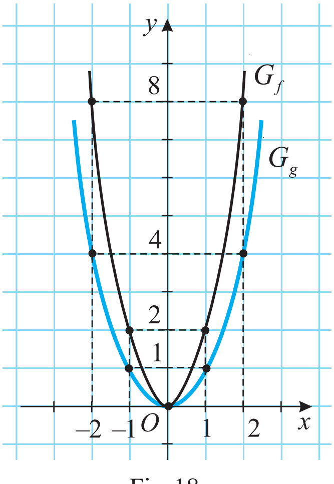


Fig. 18

b)

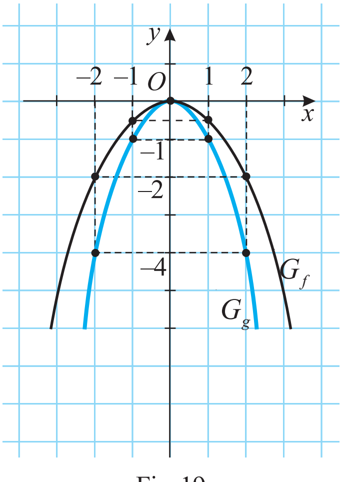


Fig. 19

Observație. Pentru funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, sînt posibile cazurile reprezentate în figurile 20 şi 21.

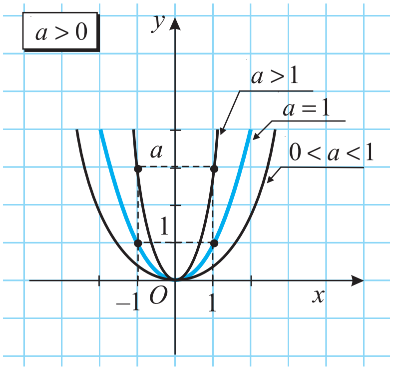


Fig. 20

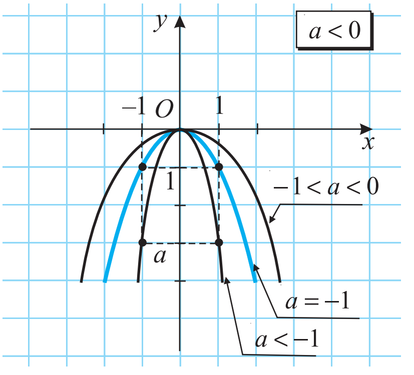


Fig. 21

3.3. Transformarea graficelor

3.3.1. Graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + n$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{R}^*$

INVESTIGĂM

• Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g şi f:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$	10	6,5	4	2,5	2	2,5	4	6,5	10

Graficele funcțiilor g şi f sînt reprezentate în figura 22.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului G_g cu 2 unități liniare în sus obținem punctul respectiv al graficului G_f. Astfel, graficul funcției f se obține din graficul funcției g efectuînd translația cu 2 unități liniare de-a lungul axei Oy, în sensul acesteia.

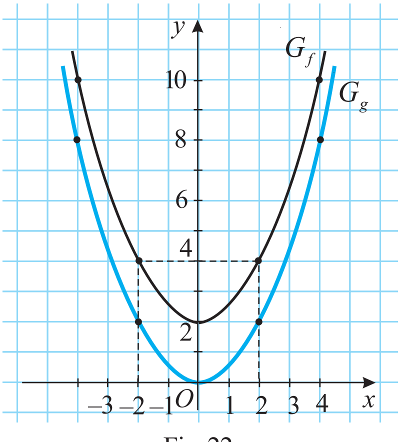


Fig. 22

APLICĂM

• Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{2}x^2.$

Trasați graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3.$

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g și h:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8
$h(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3$	5	1,5	–1	–2,5	–3	–2,5	–1	1,5	5

Graficele funcțiilor g și h sînt reprezentate în figura 23.

Observăm că graficul funcției h se obține din graficul funcției g efectuînd translația cu 3 unități liniare de-a lungul axei Oy, în sensul opus acesteia.

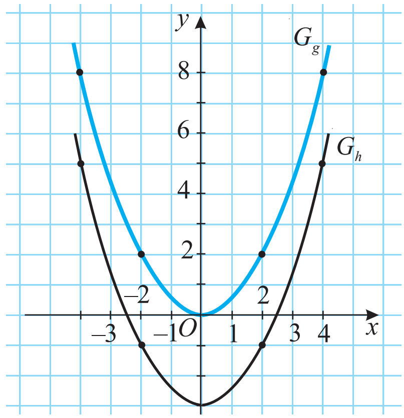


Fig. 23

GENERALIZĂM

Graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = ax^2 + n, \ a \neq 0, \ n \in \mathbb{R}^*$, este o parabolă care se obține din graficul funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ g(x) = ax^2, \ \ a \neq 0,$ efectuînd translația de-a lungul axei Oy cu n unități liniare în sensul acesteia, dacă $n > 0$, sau cu $-n$ unități liniare în sensul opus acesteia, dacă $n < 0$.

3.3.2. Graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = a(x - m)^2, \ \ a \neq 0, \ \ m \in \mathbb{R}^*$

INVESTIGĂM

• Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ g(x) = \frac{1}{2}x^2.$

Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2.$

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g și f:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5
$f(x) = \frac{1}{2}(x - 2)^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5

Graficele funcțiilor g şi f sînt reprezentate în figura 24.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului G_g cu 2 unități liniare în dreapta de-a lungul axei Ox obținem punctul respectiv al graficului G_f. Astfel, graficul funcției f se obține din graficul funcției g efectuînd translația cu 2 unități liniare de-a lungul axei Ox, în sensul acesteia.

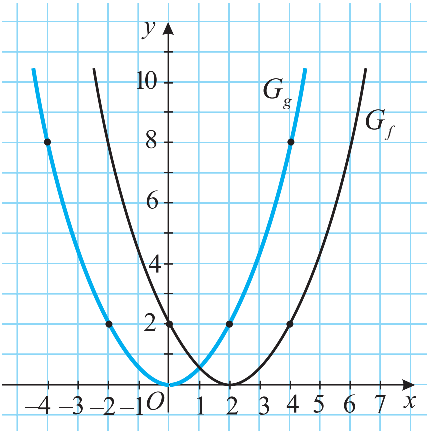


Fig. 24

APLICĂM

• Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = \frac{1}{2}x^2$.

Trasați graficul funcției $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$.

Rezolvare:

Alcătuim tabelul de valori al funcțiilor g şi h:

x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$g(x) = \frac{1}{2}x^2$	18	12,5	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5
$h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8	12,5	18	24,5	32

Graficele funcțiilor g şi h sînt reprezentate în figura 25.

Observăm că la translația fiecărui punct al graficului G_g cu 3 unități liniare în stînga de-a lungul axei Ox obținem punctul respectiv al graficului G_h. Astfel, graficul funcției h se obține din graficul funcției g efectuînd translația cu 3 unități liniare de-a lungul axei Ox, în sensul opus acesteia.

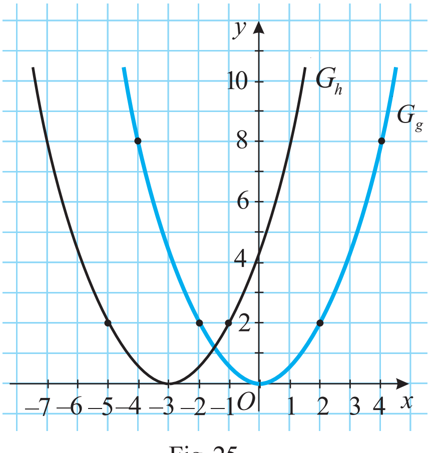


Fig. 25

GENERALIZĂM

Graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f(x) = a(x-m)^2, \ a \neq 0, \ m \in \mathbb{R}^*$, este o parabolă care se obține din graficul funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = ax^2, \ a \neq 0$, efectuînd translația de-a lungul axei Ox cu m unități liniare în sensul acesteia, dacă $m > 0$, sau cu $-m$ unități liniare în sensul opus acesteia, dacă $m < 0$.

Exercițiu

Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă:

a) $f(x) = -2x^2$, $g(x) = -2x^2 + 1$, $h(x) = -2x^2 - 3$;

b) $f(x) = -2x^2$, $g(x) = -2(x-1)^2$, $h(x) = -2(x+2)^2$.

3.4. Studiul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

INVESTIGĂM

• Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - x - 6$.

a) Schițați graficul funcției f.

b) Determinați proprietățile funcției f.

Rezolvare:

a) 1. Aflăm punctele de intersecție a graficului G_f cu axa Ox:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1{,}5 \text{ sau } x = 2.$$

Deci, punctele de intersecție a graficului G_f cu axa Ox sînt $A(-1{,}5;\ 0)$ și $B(2;\ 0)$.

2. Aflăm punctul de intersecție a graficului G_f cu axa Oy: $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 0 - 6 = -6$. Prin urmare, $C(0, -6)$ este punctul de intersecție a graficului G_f cu axa Oy.

3. Determinăm axa de simetrie pentru graficul G_f:

$f\left(x + \frac{1}{4}\right) = f\left(-x + \frac{1}{4}\right)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, ceea ce demonstrează că dacă punctul $E\left(x + \frac{1}{4},\ y\right) \in G_f$, atunci și punctul $E'\left(-x + \frac{1}{4},\ y\right) \in G_f$, adică dreapta de ecuație $x = \frac{1}{4}$ este axă de simetrie pentru graficul G_f (fig. 26).

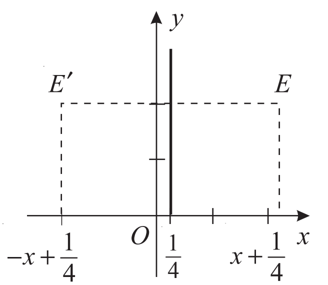


Fig. 26

4. Aflăm coordonatele vîrfului parabolei.

Cum $x = \frac{1}{4}$ este axă de simetrie pentru G_f, rezultă că abscisa vîrfului parabolei G_f este $x_0 = \frac{1}{4}$, iar ordonata lui este $y_0 = f(x_0) = 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} - 6 = -\frac{49}{8}$.

Prin urmare, punctul $V\left(\frac{1}{4}, -\frac{49}{8}\right)$ este vîrful parabolei G_f.

5. Completăm tabelul de valori al funcției f pentru abscisele punctelor de intersecție a graficului G_f cu axele Ox, Oy și, eventual, pentru alte valori ale lui x:

x	-2	$-1{,}5$	0	$\frac{1}{4}$	2	3
$f(x) = 2x^2 - x - 6$	4	0	-6	$-\frac{49}{8}$	0	9

6. Trasăm „prin puncte” graficul G_f și obținem o *parabolă cu ramurile în sus* (fig. 27).

b) Utilizăm graficul G_f și determinăm proprietățile funcției f:

1° f are două zerouri: $x_1 =$ ________, $x_2 =$ ________.

2° $f > 0$ pentru $x \in$ ________ și $f < 0$ pentru $x \in$ ________.

3° f este strict descrescătoare pe ________ și strict crescătoare pe ________.

4° $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = f($ ________ $) =$ ________ și punctul $x =$ ________ este punct de ________ al funcției f.

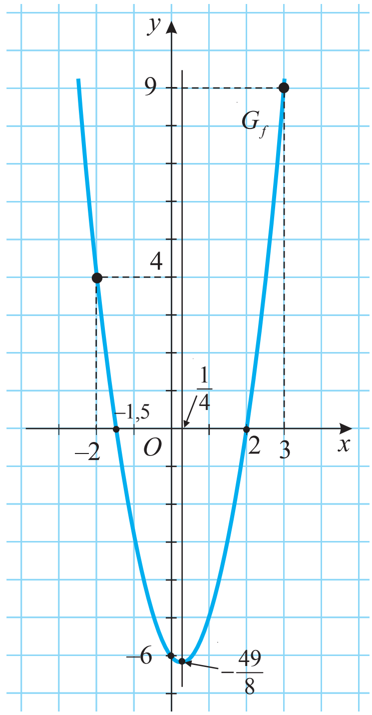


Fig. 27

Definiție

Funcția de forma $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **funcție de gradul II**.

Cum numărul real a este nenul, putem scrie:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] \text{ sau}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a} = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2 + \frac{-\Delta}{4a} \qquad (1)$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$ este discriminantul ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, asociată funcției f. Egalitatea (1) se numește ***forma canonică a funcției*** f.

Din (1) rezultă că, pentru a obține reprezentarea grafică a funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, din reprezentarea grafică a funcției $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2$, $a \in \mathbb{R}^*$, se efectuează două translații ale graficului G_g:

1) de-a lungul axei Ox cu $-\frac{b}{2a}$ unități liniare (în sensul axei Ox, dacă $-\frac{b}{2a} > 0$, și în sensul opus axei, dacă $-\frac{b}{2a} < 0$);

2) de-a lungul axei Oy cu $-\frac{\Delta}{4a}$ unități liniare (în sensul axei Oy, dacă $-\frac{\Delta}{4a} > 0$, și în sensul opus axei, dacă $-\frac{\Delta}{4a} < 0$).

Exercițiu. Fie funcția: a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x - 2$; b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 1 - x^2$.

1. Trasați: a) graficul funcției g; b) graficul funcției h.
2. Determinați: a) proprietățile funcției g; b) proprietățile funcției h.

Rețineți!

Abscisa x_0 a vîrfului parabolei G_f este $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Pentru a calcula ordonata y_0 a vîrfului parabolei G_f, aflăm $y_0 = f(x_0)$.

3.4.1. Mulțimea valorilor funcției de gradul II

Cînd x parcurge mulțimea $\mathbb{R}$, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ parcurge $[0, +\infty)$, iar $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ parcurge:

a) $[0, +\infty)$, dacă $a>0$; b) $(-\infty, 0]$, dacă $a<0$.

Prin urmare, din (1) şi din a), b) rezultă că:

1) $E(f)=\left[-\frac{\Delta}{4a}, +\infty\right)$, dacă $a>0$; 2) $E(f)=\left(-\infty, -\frac{\Delta}{4a}\right]$, dacă $a<0$.

APLICĂM

• Fie funcția:

a) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-7x+12$; b) $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-3x^2-2x+1$.

Aflați $E(f)$.

Rezolvare:

a) $f(x)=x^2-7x+12=\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$. Cum $a=1>0$, obținem $E(f)=\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$.

b) $f(x)=-3x^2-2x+1=$ ______. Deoarece $a=-3<0$, rezultă că $E(f)=$ ______.

Exercițiu. Fie funcția $g: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2-x-x^2$. Aflați $E(g)$.

3.4.2. Extremele funcției de gradul II

Fie funcția $f: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, şi forma ei canonică $f(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}$, unde $\Delta=b^2-4ac$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

1) *Cazul* $a>0$

Cum $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ şi $a>0$, rezultă că şi $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$.

Atunci $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a}\geq-\frac{\Delta}{4a}$. Deci, $f(x)\geq\frac{-\Delta}{4a}$ (2) pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Evident, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$ numai pentru $x=-\frac{b}{2a}$.

Atunci $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{-\Delta}{4a}$ (3).

Prin urmare, din (2) şi (3) rezultă că $f(x)\geq f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ (4) pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

Din (2) şi (4) rezultă că $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{-\Delta}{4a}$ şi $x_0=-\frac{b}{2a}$ este punct de minim al funcției f (fig. 28).

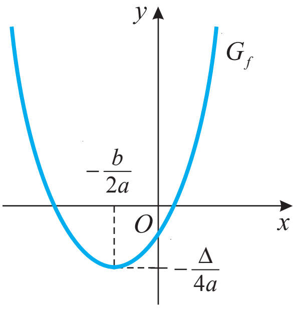


Fig. 28

2) *Cazul* $a < 0$

Cum $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ şi $a<0$, rezultă că $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 \leq 0$.

Atunci $a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a} \leq \dfrac{-\Delta}{4a}$. Deci, $f(x) \leq \dfrac{-\Delta}{4a}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Ţinînd cont de (3), obţinem $f(x) \leq f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$ (5) pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Din (5) rezultă că $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = \dfrac{-\Delta}{4a}$ şi $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$ este punct de maxim pentru funcţia f (fig. 29).

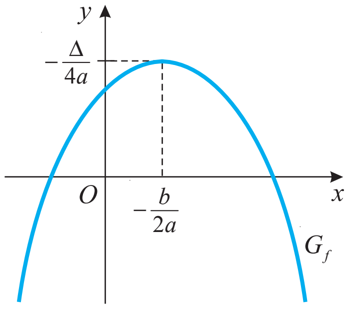


Fig. 29

APLICĂM

• Fie funcţiile:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 7x + 12$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -3x^2 - 2x + 1$.

Aflaţi punctele de extrem şi extremele funcţiilor f şi g.

Rezolvare:

a) Cum $a = 1 > 0$, obţinem $x_0 = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-7}{2} = 3{,}5$ – punct de minim al funcţiei f şi $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x) = f(3,5) = -\dfrac{1}{4}$.

b) Deoarece $a = -3 < 0$, avem $x_0 =$ … $=$ … $=$ … – punct de … al funcţiei g şi $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} g(x) = g($…$) =$ … .

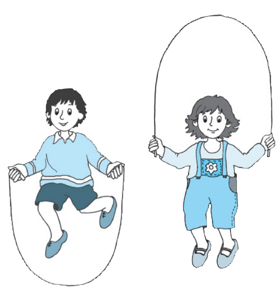
Exerciţiu. Fie funcţia $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = 4 - x^2$. Aflaţi punctele de extrem şi extremele funcţiei h.

3.4.3. Intervalele de monotonie ale funcţiei de gradul II

GENERALIZĂM

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, o funcţie de gradul II.

- Dacă $a > 0$, funcţia f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ (fig. 28).
- Dacă $a < 0$, funcţia f este strict crescătoare pe $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ şi strict descrescătoare pe $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ (fig. 29).
- Intervalele $\left(-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ şi $\left[-\dfrac{b}{2a}, +\infty\right)$ se numesc ***intervale de monotonie ale funcţiei*** f.



APLICĂM

• Fie $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$: a) $f(x)=3x^2+x-8$; b) $f(x)=-0{,}3x^2-6x+3$.

Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f.

Rezolvare:

a) Cum $a=3>0$ şi $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{1}{3\cdot 2}=-\dfrac{1}{6}$, rezultă că funcţia f este strict descrescătoare pe $\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{6}\right]$ şi strict crescătoare pe $\left[-\dfrac{1}{6},\ +\infty\right)$.

b) Deoarece $a=-0{,}3<0$ şi $-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-6}{2(-0{,}3)}=-10$, rezultă că funcţia f este strict crescătoare pe $(-\infty, -10]$ şi strict descrescătoare pe $[-10, +\infty)$.

Exerciţiu. Fie funcţia $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=2x^2-x$. Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei g.

3.4.4. Zerourile funcţiei de gradul II

• Fie funcţiile: a) $f_1\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_1(x)=x^2-9x+18$;
b) $f_2\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_2(x)=4x^2-4x+1$;
c) $f_3\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_3(x)=-x^2+x-1$.

Aflaţi zerourile funcţiilor f_1, f_2, f_3.

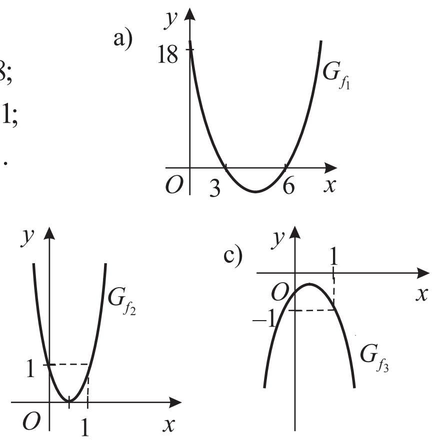


Fig. 30

Rezolvare:

a) $f_1(x)=0 \Leftrightarrow x^2-9x+18=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_1=3,\ x_2=6$. Prin urmare, funcţia f_1 are două zerouri: $x_1=3$, $x_2=6$ (fig. 30 a)).

b) $f_2(x)=0 \Leftrightarrow 4x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow x=0{,}5$. Deci, funcţia f_2 are un zerou: $x=0{,}5$ (fig. 30 b)).

c) $f_3(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+x-1=0$.

Această ecuaţie nu are soluţii reale. (Argumentaţi!)

Astfel, funcţia f_3 nu are zerouri (fig. 30 c)).

GENERALIZĂM

Zerourile funcţiei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+bx+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$, $a\neq 0$, sînt *soluţiile reale ale ecuaţiei* $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, asociată funcţiei f.

Numărul de soluţii reale ale ecuaţiei de gradul II depinde de valoarea discriminantului ei $\Delta=b^2-4ac$.

- Dacă $\Delta>0$, ecuaţia de gradul II are două soluţii reale, iar funcţia f – două zerouri:
  $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
  Prin urmare, graficul G_f intersectează axa Ox în două puncte: $(x_1, 0)$, $(x_2, 0)$.
- Dacă $\Delta=0$, ecuaţia de gradul II are o soluţie reală, iar funcţia f – un zerou: $x=-\dfrac{b}{2a}$.
  Deci, graficul G_f are un punct comun cu axa Ox, punctul $\left(-\dfrac{b}{2a},\ 0\right)$.

- Dacă $\Delta < 0$, ecuația de gradul II nu are soluții reale. Deci, funcția f nu are zerouri. Prin urmare, graficul G_f nu intersectează axa Ox.

Exercițiu. Fie: a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 3x - 10$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^2 - 2x$. Aflați zerourile funcțiilor f și g.

3.4.5. Semnul funcției de gradul II

INVESTIGĂM

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c,\ a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$. Determinați mulțimea valorilor lui $x \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$).

Rezolvare:

Semnul funcției f depinde de semnul discriminantului Δ al ecuației $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, asociată funcției f.

Scriem funcția f sub forma canonică: $f(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \dfrac{-\Delta}{4a^2}\right]$.

1) *Cazul* $\Delta < 0$

Semnul valorilor funcției f coincide cu semnul numărului a, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ (fig. 31).

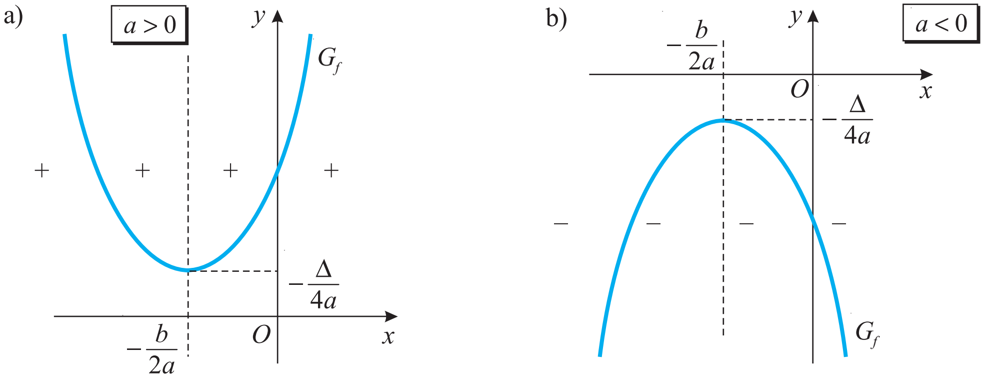


Fig. 31

2) *Cazul* $\Delta = 0$

Semnul valorilor funcției $f(x) = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ coincide cu semnul numărului a, pentru orice $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$ (fig. 32).

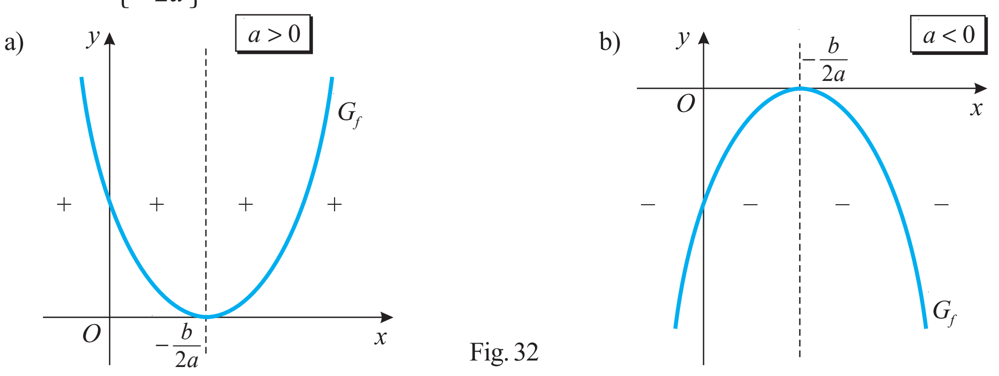


Fig. 32

3) *Cazul* $\Delta > 0$

Semnul valorilor funcției f, cu zerourile $x_1 < x_2$, coincide cu semnul numărului a, pentru orice $x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, și este opus semnului lui a, pentru orice $x \in (x_1, x_2)$ (fig. 33).

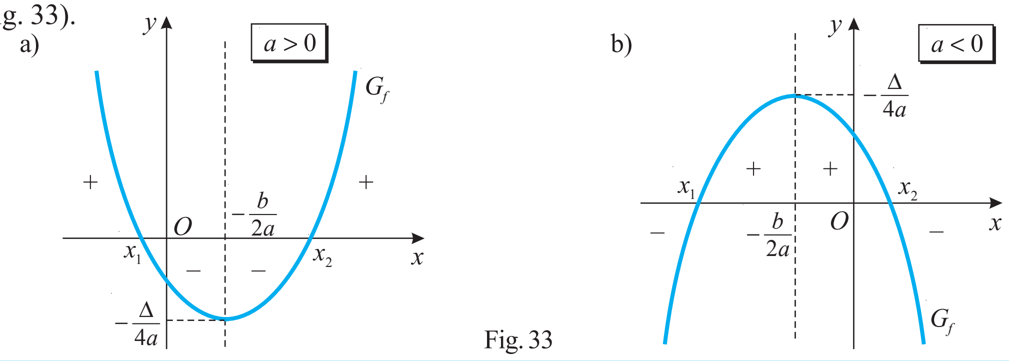


Fig. 33

Observație. Atît semnul funcției de gradul II, cît și intervalele ei de monotonie pot fi identificate mai simplu folosind reprezentarea grafică a acesteia.

Exercițiu. Fie: a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 - x - 2$; b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x^2 + 2x - 3$. Aflați semnele funcțiilor f și g.

3.4.6. Graficul funcției de gradul II

INVESTIGĂM

Pentru a trasa graficul funcției de gradul II, procedăm astfel:

① Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficului G_f:

a) cu axa Ox: rezolvăm ecuația $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$, asociată funcției f; soluțiile ecuației sînt zerourile funcției f;

b) cu axa Oy: calculăm $f(0)$.

② Aflăm coordonatele vîrfului parabolei: $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$; punem în evidență axa de simetrie $x = -\frac{b}{2a}$ a parabolei.

③ Completăm tabelul, numit ***tabelul de variație*** al funcției f. Tabelul include abscisele punctelor de intersecție a graficului G_f cu axele Ox și Oy (dacă există), abscisa vîrfului parabolei și, eventual, alte valori ale lui x.

④ Completînd tabelul de variație, putem stabili monotonia funcției, punctele de extrem, extremele ei, precum și comportamentul graficului G_f la $-\infty$, la $+\infty$.

⑤ Trasăm graficul funcției.

Observație. Cu $\searrow$ vom nota funcția descrescătoare, iar cu $\nearrow$ – funcția crescătoare.

APLICĂM

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - 2x + 3$.

a) Trasați graficul funcției f. b) Precizați monotonia, semnul și extremele funcției f.

Rezolvare:

a) ① Determinăm coordonatele punctelor de intersecție a graficului G_f cu axa Ox: rezolvăm ecuația $x^2-2x+3=0$, asociată funcției f; cum $\Delta=-8<0$, rezultă că graficul G_f nu intersectează axa Ox.

Determinăm coordonatele punctului de intersecție a graficului G_f cu axa Oy: $f(0)=0^2-2\cdot 0+3=3$; prin urmare, graficul G_f intersectează axa Oy în punctul $(0, 3)$.

② Aflăm coordonatele vîrfului parabolei: $x_0=-\dfrac{b}{2a}=1$, $y_0=f(x_0)=2$.

Aşadar, punctul $V(1, 2)$ este vîrful parabolei. Prin urmare, dreapta de ecuație $x=-\dfrac{b}{2a}=1$ este axa de simetrie a graficului G_f.

③–④ Completăm tabelul de variație al funcției f:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x)=x^2-2x+3$	$+\infty$	6	3	2	3	6	$+\infty$
Concluzie		$\searrow$		min		$\nearrow$	

⑤ Trasăm graficul funcției f – parabola G_f (fig. 34).

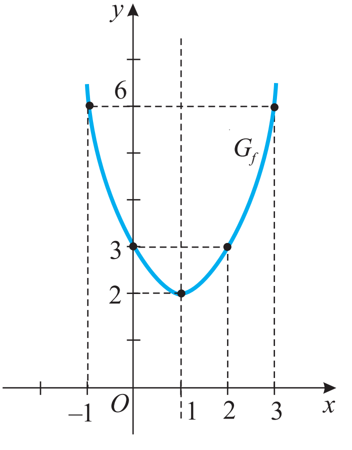


Fig. 34

b) Funcția f ia valori pozitive pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Funcția f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1]$ şi strict crescătoare pe $[1, +\infty)$.

Punctul $x=1$ este punct de minim pentru funcția f şi $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} f(x)=f(1)=2$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$. Aflați:

a) valorile lui x pentru care $f(x)$ este: 36; –4; 0,25; 100; 7; –1,6;

b) valorile lui f, ştiind că x este: 1,4; – 0,2; – 3; 0,4; 2; $\sqrt{5}$; 7,(2); $-4\sqrt{3}$.

2. Fie punctele:

a) $A(2; -2)$; b) $B(1; 2)$; c) $C(-1; 0{,}5)$; d) $D(1; -0{,}5)$; e) $E(0{,}5; 0{,}5)$.

Determinați care dintre aceste puncte aparțin graficului funcției:

1) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2$; 2) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-0{,}5x^2$; 3) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=0{,}5x^2$.

3. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=3x^2$; b) $f(x)=\frac{1}{3}x^2$; c) $f(x)=-1{,}5x^2$; d) $f(x)=-\frac{1}{4}x^2$.

1) Trasați graficul funcției f.

2) Determinați proprietățile funcției f.

4. a) Construiți o funcție care arată dependența ariei suprafeței totale a cubului de lungimea muchiei lui.

b) Reprezentați graficul acestei funcții.

c) Aflați:

1) aria totală a cubului, ştiind că lungimea muchiei lui este de: 0,5 cm; 1,2 dm; 3 m.

2) lungimea muchiei cubului, ştiind că aria suprafeței totale a lui este de:
$16\ \text{cm}^2$; $8\sqrt{3}\ \text{dm}^2$; $4\ \text{m}^2$.

5. Completați cu numere reale, astfel încît punctul $A(\square, \square)$ să aparțină graficului funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x) = x^2$; b) $f(x) = -x^2$; c) $f(x) = 3x^2$;
d) $f(x) = -2{,}5x^2$; e) $f(x) = 3x(x-2)$; f) $f(x) = -0{,}5x(x+1)$;
g) $f(x) = x^2 - x - 2$; h) $f(x) = -3x^2 + x + 1$; i) $f(x) = x^2 + 3x + 5$.

6. Fie funcțiile $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2{,}3x^2$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -4x^2$, $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{3}{4}x^2$.
Precizați: a) extremele; b) monotonia; c) semnele funcțiilor.

7. Aflați zerourile funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 16x^2 - 4$; b) $f(x) = 6x^2 + 3$; c) $f(x) = x^2 - 8x + 12$; d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 8$.

8. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = x^2 - 7x + 12$; b) $f(x) = 3x^2 - 2x - 5$; c) $f(x) = x^2 - x + 4$;
d) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$; e) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$.

1) Trasați graficul funcției f.

2) Determinați axa de simetrie a graficului şi proprietățile funcției f.

Formăm capacitățile și aplicăm

9. Trasați graficul şi determinați proprietățile funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = x^2 + 3$; b) $f(x) = 2x^2 - 1$; c) $f(x) = 3(x+2)^2$;
d) $f(x) = -2(x-1)^2$; e) $f(x) = 4(x+2)^2 - 6$; f) $f(x) = -(x-3)^2 + 2$.

10. Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 4{,}7x^2$; b) $f(x) = -3x^2 + 2$; c) $f(x) = 4(x-1)^2$;
d) $f(x) = -2(x+3)^2$; e) $f(x) = x^2 - 5x + 6$; f) $f(x) = 3(x-4)^2 + 5$.
Aflați mulțimea valorilor $E(f)$.

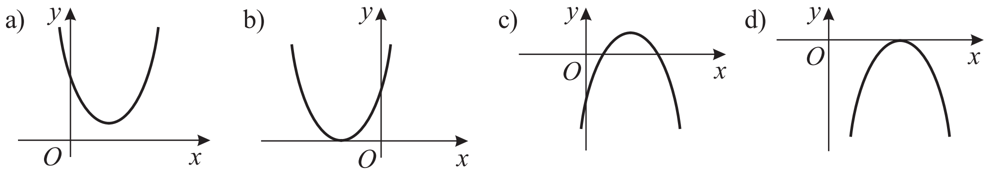
11. Reprezentați în acelaşi sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:
a) $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2$, $g(x) = 3x^2 + 2$, $h(x) = 3x^2 - 4$;
b) $f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2$, $g(x) = -2(x+1)^2 + 3$, $h(x) = -2(x-3)^2 - 4$.
Ce ați observat?

12. Fie tabelul de variație al funcției f:

x	$-\infty$	-1	0	2	$3{,}5$	5	$+\infty$
$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$	$+\infty$	18	10	0	$-2{,}25$	0	$+\infty$
Concluzie			$\searrow$		min		$\nearrow$

Trasați graficul funcției f.

13. Fie graficul funcției de gradul II:

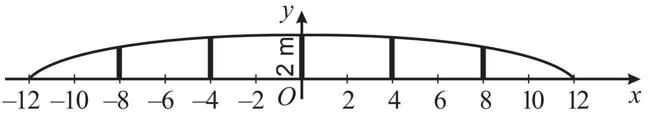


Aflați semnul coeficientului a şi al discriminantului Δ ai ecuației asociate funcției respective.

14. Completați cu unul din semnele „<”, „>”, „=”, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată:
1) Dacă graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, reprezintă o parabolă cu ramurile în jos şi vîrful ei este situat pe axa Ox, atunci a $\square$ 0, Δ $\square$ 0.
2) Dacă graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, reprezintă o parabolă cu ramurile în sus şi vîrful ei este situat pe axa Oy, atunci a $\square$ 0, Δ $\square$ 0.

15. Fie h înălțimea (în metri) la care se află o minge aruncată în sus, t – timpul (în secunde) în care mingea s-a aflat în zbor. Dependența variabilei h de variabila t se exprimă prin formula: $h = 24t - 4{,}9t^2$.
a) Care este înălțimea maximă la care ajunge mingea?
b) În cît timp mingea se va ridica în zbor şi în cît timp va coborî?
c) Peste cîte secunde, după ce a fost aruncată în sus, mingea va cădea pe pămînt?

16. Balustrada unui pod are forma unui arc de parabolă. Înălțimea balustradei este de 2 m, iar lungimea coardei care o subîntinde – de 24 m. Balustrada are 5 stîlpi verticali, fixați în punctele care împart coarda în părți de aceeaşi lungime. Aflați lungimile acestor stîlpi.



17. Trasați graficul funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = (x+2)(x-4)$; b) $f(x) = -6x(x+1)$; c) $f(x) = -2(x-3)(5-x)$;
d) $f(x) = 5(x-1)(x-3)$; e) $f(x) = -(x-3)(x-4)$; f) $f(x) = 4x(x-2)$.

18. Parabola 1) $y = 3x^2$; 2) $y = -0{,}5x^2$ a fost deplasată cu 2 unități de-a lungul axei Ox şi cu 3 unități de-a lungul axei Oy.
a) Determinați funcția g al cărei grafic este parabola obținută în urma acestor transformări. Cîte funcții pot fi determinate?
b) Reprezentați graficul G_g pentru fiecare funcție obținută.

19. Lungimea laturii AC a triunghiului ABC este a, iar înălțimea corespunzătoare acesteia – h. Prin punctul D al înălțimii BM este dusă o dreaptă paralelă cu AC. Exprimați ariile figurilor obținute ca funcții de variabila x, unde $x = BD$.

20. Determinați, utilizînd graficele, apoi în mod analitic, punctele de intersecție a graficelor funcțiilor:
a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 - x + 4$, şi $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = -x + 2$;
b) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2$, şi $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 3$.

21. Determinați legitatea şi scrieți numărul omis:

$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x - 10$	7
$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 + x - 3$	?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

22. Aflați valorile parametrului real a pentru care are zerouri funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$:
a) $f(x) = ax^2 + 7$; b) $f(x) = ax^2 - 4$; c) $f(x) = x^2 + a$; d) $f(x) = 2x^2 - a$.

23. Aflați valorile coeficienților b și c, astfel încît parabola $y = x^2 + bx + c$ să aibă vîrful în punctul $V(-3, 6)$.

24. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, al cărei grafic trece prin punctele $A(-2, 0)$, $B(1, 6)$ și care are valoarea maximă 6.

25. Formulați și rezolvați exerciții asemănătoare cu exercițiile **13**, **15**, **16**, **18**, **21**, **23**.

26. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9, & \text{dacă } x \geq 3 \\ 3 - x, & \text{dacă } x < 3; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{dacă } x > 0 \\ x - 2, & \text{dacă } x \leq 0. \end{cases}$

• *Problemă pentru campioni*

27. Trasați graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite prin:
a) $f(x) = x^2 - 6|x| - 7$; b) $f(x) = x^2 - 5|x + 4| - 26$; c) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$.

§ 4. Funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

INVESTIGĂM

• Fie cubul cu muchia a. Construiți o funcție care să descrie dependența volumului cubului de lungimea muchiei sale.

Rezolvare:

Volumul cubului se calculează aplicînd formula $\mathcal{V} = a^3$. Prin urmare, dependența volumului cubului de lungimea muchiei sale este descrisă de funcția $g: (0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $g(x) = x^3$.

Această funcție ne conduce la funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$.
a) Trasați graficul funcției f.
b) Stabiliți proprietățile funcției f.

Rezolvare:

a) Completăm tabelul de valori al funcției f pentru valoarea zero, unele valori pozitive și negative ale lui x:

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3$	8	1	0	1	8

Graficul trasat „prin puncte” este reprezentat în figura 35.

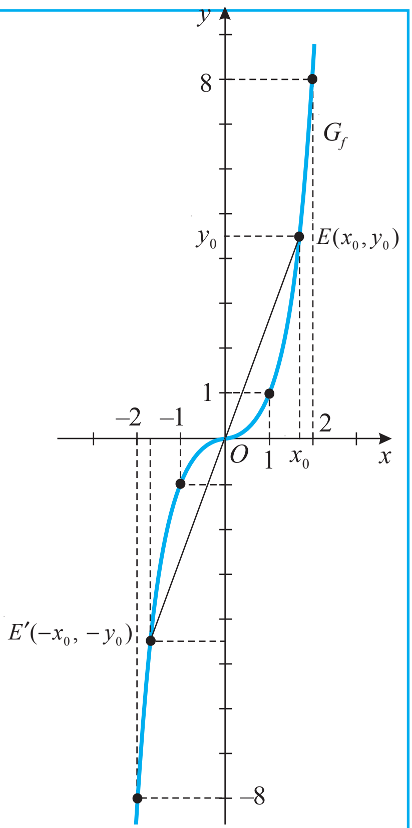


Fig. 35

b) ***Proprietăți ale funcției*** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

1° $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Prin urmare, $x = 0$ este zeroul funcției f.

2° Funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

3° Funcția f ia valori negative pentru $x \in (-\infty, 0)$ şi valori pozitive pentru $x \in (0, +\infty)$.

4° Cum $f(-x) = -f(x)$, rezultă că dacă punctul $E(x_0, y_0) \in G_f$, atunci şi punctul $E'(-x_0, -y_0) \in G_f$. Deci, graficul G_f este simetric față de originea $O(0, 0)$ (fig. 35).
Graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$, se numeşte ***parabolă cubică***.

5° Funcția f nu are extreme.

APLICĂM

• Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$. Aflați valorile lui x pentru care $f(x)$ este:

a) -64; b) $\frac{27}{8}$; c) 125.

Rezolvare:

a) $x^3 = -64 \Leftrightarrow x = -4$; b) $x^3 = \frac{27}{8} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$; c) $x^3 = 125 \Leftrightarrow x = 5$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie punctele:
a) $A(-2, 8)$; b) $B(3, 27)$; c) $C\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{8}\right)$; d) $D(0, 1)$; e) $E(-\sqrt{3}, -3\sqrt{3})$.
Determinați care din aceste puncte aparțin graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$. Aflați:
a) valorile lui x pentru care $f(x)$ este: 125; -64; -16; $3{,}375$; -1; $0{,}001$.
b) valorile lui f, ştiind că x este: -343; $0{,}2$; $-\frac{2}{5}$; $1{,}3$; $2\sqrt{2}$; 10; $2{,}(5)$.

Formăm capacitățile și aplicăm

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$, prin metoda grafică, ecuația:
a) $x^3 = x - 1$; b) $x^3 = -2x$; c) $x^3 = 3x + 2$; d) $x^3 = 3 - x$.

4. 1) Reprezentați în acelaşi sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ şi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = -x^3$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$ şi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = x^3 + 1$.
2) Aflați semnele funcțiilor f şi g.
3) Aflați extremele funcțiilor f şi g.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

5. Aflați extremele funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definite prin:
a) $f(x) = x^3 - 2$; b) $f(x) = (x+2)^3$; c) $f(x) = 2(x-8)^2 + 1$; d) $f(x) = -5x + 1$.

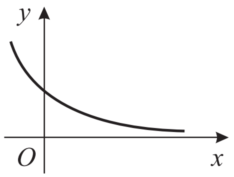
6. Trasați graficul şi precizați monotonia funcției: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} 2x^3, & x \le 0 \\ x^2, & x > 0. \end{cases}$

7. Reprezentați în acelaşi sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|^3$ şi $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(x) = |x^3|$.

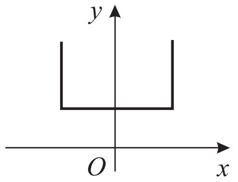
Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

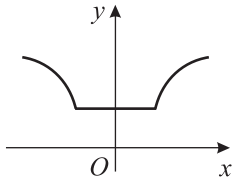
1. Determinați care dintre următoarele linii nu este graficul unei funcții:



a)



b)



c)

Argumentați!

2. Fie funcția:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3 - 2x$;
b) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ f(x) = \sqrt{x}$;
c) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\dfrac{2}{x}$;
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^2$;
e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x + 1$;
f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$.

Precizați care dintre următoarele puncte aparțin graficului G_f:

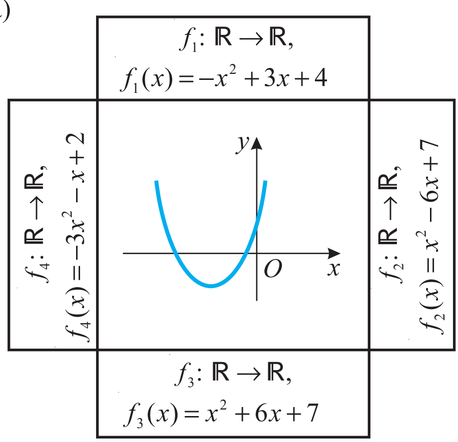
1) $A(-1, 1)$; 2) $B(1, 1)$; 3) $C(0, 1)$; 4) $O(0, 0)$;
5) $D(1, -2)$; 6) $E(0, 3)$; 7) $F(4, 2)$; 8) $M(-2, 1)$.

3. Recunoașteți funcția de gradul II:

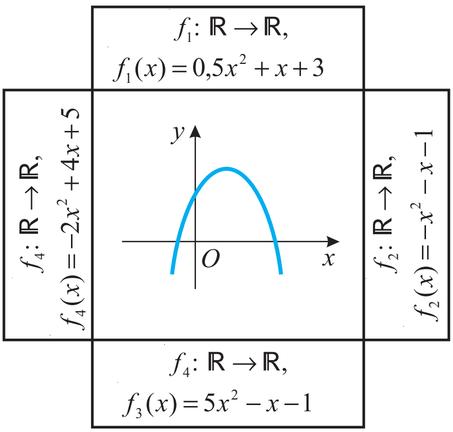
a) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*,\ f(x) = -\dfrac{5}{x^2}$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Q},\ f(x) = 7 - x^2$;
c) $f: \mathbb{R}_- \to \mathbb{R},\ f(x) = -1{,}6x^2$;
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x^3 + x^2 - 4$;
e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 2x - 1$;
f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2 - x^3$.

4. Determinați graficul cărei funcții este schițat:

a)



b)



Formăm capacitățile și aplicăm

5. Fie mulțimea $P=\{a, b, c, d\}$. Construiți prin diagrame toate funcțiile definite pe mulțimea P cu valori în P.

6. Scrieți o formulă care să exprime dependența lungimii cercului de raza lui. Este această dependență o proporționalitate directă?

7. Mariana avea 15 lei. După ce a procurat x timbre la prețul de 0,5 lei, i-au rămas y lei.
a) Exprimați printr-o formulă dependența lui y de x.
b) Aflați domeniul de definiție al funcției obținute.

8. Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-1{,}5x+b$, pentru $b\in\{-2, 0, 2, 5\}$.
Ce ați observat?

9. Trasați graficul și determinați proprietățile funcției $f\colon \mathbb{R}^*\to\mathbb{R}^*$, dacă:
a) $f(x)=-\dfrac{4}{x}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{2x}$; c) $f(x)=\dfrac{7}{x}$; d) $f(x)=-\dfrac{1}{5x}$.

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$, prin metoda grafică, ecuația:
a) $\sqrt{x}=3x-2$; b) $\dfrac{25}{x}=x$; c) $\dfrac{1}{2x}=2x$; d) $3x^2=5x-2$.

11. Trasați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^2+n$, pentru $n\in\{-1, 0, 1, 3\}$.
Ce ați observat?

12. Reprezentați în același sistem de axe ortogonale graficele funcțiilor $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2(x-m)^2$, pentru $m\in\{-1, 0, 1, 3\}$.
Ce ați observat?

13. Apa dintr-un ceainic electric, la un moment dat, avea temperatura de 10°C. În continuare, peste fiecare minut, temperatura apei creștea cu 4°C, astfel încît a atins valoarea de 100°C. Exprimați printr-o formulă dependența temperaturii apei y (în grade Celsius) de timpul încălzirii t (în minute). Schițați graficul acestei dependențe. Utilizînd graficul, aflați:
a) temperatura apei peste:
1) 5 minute; 2) 10 minute;
3) 15 minute; 4) 20 de minute de la începutul încălzirii.
b) peste cîte minute temperatura apei a atins valoarea de:
1) 50°C; 2) 70°C; 3) 100°C.

14. Trasați graficul și stabiliți proprietățile funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dacă:
a) $f(x)=1-x-x^2$; b) $f(x)=x^2-6x+9$; c) $f(x)=9x^2-6x+1$; d) $f(x)=3x^2+4x+2$.

15. Aflați axa de simetrie a graficului și extremele funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:
a) $f(x)=5x^2+3$; b) $f(x)=x^2-4$; c) $f(x)=-3(x+2)^2$; d) $f(x)=6x^2-x+3$.

16. Definiți printr-o formulă funcția de gradul II care este:
a) strict crescătoare pe $(-\infty, 4]$ și strict descrescătoare pe $[4, +\infty)$;
b) strict descrescătoare pe $(-\infty, -2]$ și strict crescătoare pe $[-2, +\infty)$.

17. Parabola – graficul funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x^2$, a fost deplasată cu 2 unități de-a lungul axei Oy şi cu 3 unități de-a lungul axei Ox.
a) Determinați funcția g al cărei grafic este parabola obținută în urma efectuării acestor transformări ale graficului funcției f. Cîte funcții g ați determinat?
b) Trasați graficul fiecărei funcții obținute.
c) Determinați proprietățile fiecărei funcții obținute.

18. Aflați coordonatele punctelor de intersecție cu axele Ox şi Oy a graficului funcției $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = 2x^2 - x - 15$;
b) $f(x) = -3x^2 - 2x + 1$.

19. Dați exemple de utilizare a funcțiilor studiate în viața de zi cu zi, în fizică, biologie, chimie, economie etc.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

20. Definiți printr-o formulă funcția de gradul I care satisface condiția:
a) $f(2+x) = -5x + 3$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
b) $f(3x-1) = 1 - 2x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

21. Trasați graficul funcției:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2, \text{ dacă } x \le 1 \\ \sqrt{x}, \text{ dacă } x > 1; \end{cases}$

b) $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 9, \text{ dacă } x \le -2 \\ -\dfrac{2}{x}, \text{ dacă } -2 < x < 2 \\ -0{,}5x, \text{ dacă } x \ge 2. \end{cases}$

22. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + bx + c$.
Determinați coeficienții b şi c, ştiind că vîrful parabolei G_f este punctul $A(-2, 4)$.

23. Determinați funcția de gradul II al cărei grafic trece prin punctele:
a) $A(-3, 0)$, $B(2, 5)$ şi care are valoarea maximă 5;
b) $A(0, 2)$, $B(-1, 4)$ şi care are valoarea minimă 3.

24. Trasați graficul funcției:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3|x| - 4$;
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |0{,}2x + 5|$;
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |3x^2 - x - 2|$.

25. Rezolvați în $\mathbb{R}$, prin metoda grafică, ecuația:
a) $x^3 = x^2 + x + 1$;
b) $2x = x^3 - 4$.

26. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - x + 1$. Pentru care valori reale ale lui a are loc relația $f(a) = -3f(-a) + 6$?

27. Formulați exerciții asemănătoare cu exercițiile **13**, **16**, **17**, **21**, **25** şi propuneți-le colegilor.

• ***Problemă pentru campioni***

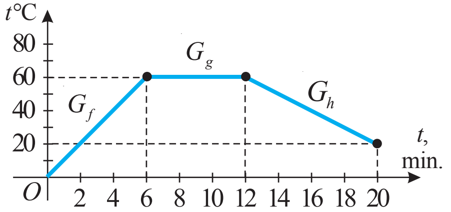
28. Trasați graficul funcției:
a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + x^3$;
b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x^3$.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. În desen este reprezentat graficul variației temperaturii apei timp de 20 de minute:



a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă: „G_f este graficul unei funcții crescătoare”. **1 p**

A **F**

b) Aflați cu cîte grade a crescut temperatura apei în primele 6 minute. **2 p**

c) Aflați cu cîte grade s-a schimbat temperatura apei în ultimele 8 minute. **2 p**

d) Aflați perioada în care temperatura apei nu s-a schimbat. **2 p**

e) Definiți prin formule analitice funcțiile reprezentate prin graficele G_f, G_g și G_h. **7 p**

2. Determinați valorile reale ale lui x pentru care ambele funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -(x-4)^2$, și $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x) = \frac{4}{x}$, sînt descrescătoare. Argumentați răspunsul. **5 p**

3. Fie funcția

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 - 5x - 3$.

a) Scrieți în casetă unul dintre semnele „<”, „=” sau „>”, astfel încît să obțineți o propoziție adevărată: „$f(0)$ ▢ $f(-1)$”. **3 p**

b) Trasați graficul G_f. **6 p**

c) Determinați $E(f)$. **2 p**

d) Completați casetele:

$f \nearrow$ pentru $x \in$ ▢; **2 p**

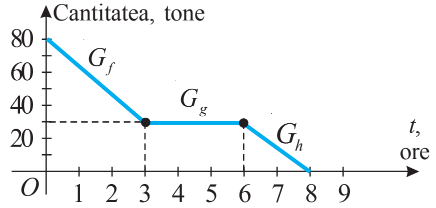
$f \searrow$ pentru $x \in$ ▢; **2 p**

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) =$ ▢. **2 p**

e) Formulați un exemplu din fizică referitor la aplicarea funcției de gradul II. **2 p**

Varianta I

1. În desen este reprezentat graficul de descărcare a grînelor dintr-un depozit timp de 8 ore:



a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă: „G_f este graficul unei funcții crescătoare”.

A **F**

b) Aflați cu cît s-a micșorat cantitatea de grîne în primele 3 ore.

c) Aflați cu cît s-a micșorat cantitatea de grîne în ultimele 2 ore.

d) Aflați perioada în care nu s-au efectuat lucrări în depozit.

e) Definiți prin formule analitice funcțiile reprezentate prin graficele G_f, G_g și G_h.

2. Determinați valorile reale ale lui x pentru care ambele funcții $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -(x+2)^2$, și $g: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$, $g(x) = -\frac{8}{x}$, sînt crescătoare. Argumentați răspunsul.

3. Fie funcția

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$.

a) Scrieți în casetă unul dintre semnele „<”, „=” sau „>”, astfel încît să obțineți o propoziție adevărată: „$f(-2)$ ▢ $f(1)$”.

b) Trasați graficul G_f.

c) Determinați $E(f)$.

d) Completați casetele:

$f \searrow$ pentru $x \in$ ▢;

$f \nearrow$ pentru $x \in$ ▢;

$\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) =$ ▢.

e) Formulați un exemplu din viața cotidiană privind aplicarea funcției de gradul II.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	38–37	36–33	32–29	28–23	22–17	16–12	11–8	7–5	4–3	2–0

Capitolul

3 Polinoame și fracții algebrice

§ 1. Monoame. Operații cu monoame

1.1. Noțiunea de monom

INVESTIGĂM

• Fie expresiile algebrice:

$8y;\ -3x^2+y;\ 2\sqrt{ab^3};\ \sqrt{7}ab;\ 6{,}5x^5y^2z^3;\ 2010;\ -9-11a^2b;\ \sqrt{xy}.$

a) Identificați expresiile în care se execută adunări și scăderi.

b) Identificați expresiile care nu conțin litere sub radical.

c) Identificați expresiile care conțin litere sub radical.

d) Identificați expresiile în care nu se execută adunări și scăderi și care nu conțin litere sub radical.

Rezolvare:

a) $-3x^2+y;\ -9-11a^2b$ $\rightarrow$

b) $8y;\ -3x^2+y;\ \sqrt{7}ab;\ 6{,}5x^5y^2z^3;\ 2010;\ -9-11a^2b$ $\rightarrow$ expresii algebrice raționale;

c) $2\sqrt{ab^3};\ \sqrt{xy}$ $\rightarrow$ expresii algebrice iraționale;

d) $8y;\ \sqrt{7}ab;\ 6{,}5x^5y^2z^3;\ 2010$ $\rightarrow$ expresii algebrice raționale.

GENERALIZĂM

- ***Expresiile algebrice*** conțin numere și litere legate prin operațiile de adunare, scădere, înmulțire, împărțire, ridicare la putere și de extragere a rădăcinii pătrate.
- ***Expresiile algebrice raționale*** nu conțin litere sub radical.
- Expresiile algebrice care conțin litere sub radical sînt ***expresii iraționale***.

Definiție

Expresiile algebrice raționale în care literele sînt factori sau baze ale unor puteri cu exponent natural se numesc **monoame**.

- Un monom este format din ***coeficient*** și ***partea literală***.
- Literele care se folosesc la scrierea monoamelor se numesc ***nedeterminate***.

$\rightarrow$ $\boxed{3}\,X^3Y$; $\boxed{-0{,}2}\,Z^4$; $\boxed{\sqrt{2}}\,XY^3Z^2$.

- Nedeterminatele se notează cu litere mari ale alfabetului latin (X, Y, Z, ...).

1.2. Forma canonică (standard) a unui monom

INVESTIGĂM

• Fie monomul $3{,}4XYX^3YZ^3$.

a) Scrieți monomul, astfel încît fiecare nedeterminată să apară o singură dată.

b) Aflați gradul monomului în raport cu nedeterminata X.

c) Aflați gradul monomului în raport cu toate nedeterminatele.

Rezolvare:

a) Aplicînd proprietățile puterii, obținem $3{,}4X^4Y^2Z^3$.

b) Deoarece în scriere avem X^4, gradul monomului în raport cu nedeterminata X este 4.

c) Gradul monomului în raport cu toate nedeterminatele este $4+2+3=9$.

- Un monom este scris în ***forma canonică*** (standard) dacă fiecare nedeterminată a acestuia apare o singură dată şi pe primul loc este scris coeficientul.
- ***Gradul unui monom în raport cu o nedeterminată*** este egal cu exponentul nedeterminatei respective a monomului scris în forma canonică.
- ***Gradul unui monom în raport cu toate nedeterminatele*** este egal cu suma exponenților nedeterminatelor monomului scris în forma canonică.
- ***Gradul monomului care nu conține nedeterminate*** (un număr real) se consideră egal cu zero.

1.3. Operații cu monoame

1.3.1. Adunarea monoamelor

INVESTIGĂM

• Efectuați: a) $3X^2Y-0{,}5XY+1{,}5X^2Y+2XY-X^3$; b) $8X^2+16X-9X^2-10X+3X^2$.

Rezolvare:

a) $\underline{3X^2Y}-\underline{\underline{0{,}5XY}}+\underline{1{,}5X^2Y}+\underline{\underline{2XY}}-X^3=3X^2Y+1{,}5X^2Y-(0{,}5XY-2XY)-X^3=$

$=(3+1{,}5)X^2Y-(0{,}5-2)XY-X^3=4{,}5X^2Y+1{,}5XY-X^3$;

b) $\underline{8X^2}+\underline{\underline{16X}}-\underline{9X^2}-\underline{\underline{10X}}+\underline{3X^2}=(8-9+3)X^2+(16-10)X=2X^2+6X$.

- Monoamele care au aceleaşi nedeterminate la aceleaşi puteri, indiferent de ordinea în care sînt scrise nedeterminatele, au aceeaşi parte literală.
- Monoamele care au aceeaşi parte literală se numesc ***monoame asemenea*** sau ***termeni asemenea***.
- ***Reducerea termenilor asemenea*** este operația prin care o sumă de monoame asemenea se înlocuieşte cu un monom asemenea cu ele. Rezultatul reducerii a două sau mai multe monoame asemenea este un monom asemenea cu ele, care are coeficientul egal cu suma coeficienților termenilor asemenea.
- Se adună sau se scad numai monoamele care au aceeaşi parte literală.

Exercițiu. Formulați regula de adunare a două sau mai multe monoame.

1.3.2. Înmulțirea monoamelor

INVESTIGĂM

• Efectuați: a) $-3X^2Y\cdot 4XYZ$; b) $5X\cdot\sqrt{2}XY^2$.

Rezolvare:

Utilizînd proprietățile puterii, obținem:

a) $-3X^2Y\cdot 4XYZ=(-3\cdot 4)\cdot(X^2\cdot X)\cdot(Y\cdot Y)\cdot Z=-12X^3Y^2Z$;

b) $5X\cdot\sqrt{2}XY^2=(\square\cdot\square)\cdot(\bigcirc\cdot\bigcirc)\cdot Y^2=\square\cdot\bigcirc^2\cdot Y^2$.

Produsul a două sau mai multe monoame este un monom.

Exercițiu. Formulați regula de înmulțire a două monoame.

1.3.3. Ridicarea la putere cu exponent natural

INVESTIGĂM

• Efectuați: a) $(2X^3YZ^4)^3$; b) $(-Y^2Z)^{125}$.

Rezolvare:

Aplicînd proprietățile puterii, obținem:

a) $(2X^3YZ^4)^3=2^3\cdot(X^3)^3\cdot Y^3\cdot(Z^4)^3=8X^9Y^3Z^{12}$;

b) $(-Y^2Z)^{125}=(-1)^{125}\cdot\square\cdot\square=-\square\,\square$.

Puterea cu exponent natural a unui monom diferit de zero este un monom.

***Observații.* 1.** Dacă exponentul este 0, atunci puterea unui monom diferit de zero este monomul 1. $\longrightarrow (5XY^3)^0=1$.

2. Dacă exponentul este 1, atunci puterea unui monom diferit de zero este însuşi monomul. $\longrightarrow (0{,}2X^2Y)^1=0{,}2X^2Y$.

Exercițiu. Formulați regula de ridicare la putere cu exponent natural a unui monom.

1.3.4. Împărțirea monoamelor

INVESTIGĂM

• Efectuați: a) $6X^3Y^2Z:2X^2YZ$; b) $-4XY:0{,}1X$.

Rezolvare:

Utilizînd proprietățile puterii, obținem:

a) $6X^3Y^2Z:2X^2YZ=(6:2)\cdot(X^3:X^2)\cdot(Y^2:Y)\cdot(Z:Z)=3\cdot X\cdot Y\cdot 1=3XY$;

b) $-4XY:0{,}1X=-(\square:\square)\cdot(\square:\square)\cdot Y=-\square\cdot\square\cdot Y=-\square\,Y$.

- În cazul în care există un unic monom, în forma canonică, care să fie cîtul împărțirii a două monoame, spunem că se poate efectua împărțirea acestor două monoame.
- Nu putem împărți un monom la monomul 0.
- Nu are sens nici $\frac{0}{0}$, deoarece există mai multe monoame, în formă canonică. De exemplu, X, Y^2, Z^3, astfel încît $X\cdot 0=0$, $Y^2\cdot 0=0$, $Z^3\cdot 0=0$.

Exercițiu. Formulați regula de împărțire a două monoame.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Determinați care dintre expresii sînt monoame:

a) $2{,}05,\ \sqrt{X}Y,\ X,\ \sqrt{15}YZ;\ Z^{2010},\ \dfrac{XY}{Z},\ X^2+Y^2;$

b) $-Y^8,\ 3\sqrt{2}XY,\ Z,\ \sqrt{XY},\ Z-X^3,\ \dfrac{X+Y}{Z},\ Y^{2012}.$

2. Indicați coeficientul și partea literală a monomului:

a) $-8XY;$ b) $2X^2YZ;$ c) $-\sqrt{3}XZ^2;$ d) $7{,}8Y^4Z^{10}.$

3. Scrieți sub forma canonică monomul:

a) $XYYXZ;$ b) $YZYZYZ;$ c) $XYX^2Y^2Z;$ d) $XZYZYZ.$

4. Determinați gradul monomului:

1) în raport cu nedeterminata X; 2) în raport cu toate nedeterminatele.

a) $X^3YZ;$ b) $-2XZ^5;$ c) $0{,}1X^2Y;$ d) $\sqrt{3}YZ.$

5. Indicați monoamele asemenea:

a) $5XY,\ 3X^2,\ -XY,\ Z^3Y,\ -0{,}25X^2,\ YZ^3,\ XYZ;$

b) $XY^2,\ -8{,}5Y^3,\ -2Y^2X,\ 0{,}8Y^3,\ X^3Y^3Z^3,\ XY.$

6. Reduceți termenii asemenea:

a) $XY-3Y^4+2{,}5XY+8Y^4;$ b) $3Z^2-2XY-0{,}2Z^2+10XY.$

7. Efectuați:

a) $-4X^2Y\cdot 3XY^2;$ b) $8{,}2XZ\cdot 5X^3YZ;$ c) $\sqrt{3}YZ\cdot\sqrt{3}XZ^3;$ d) $7\frac{1}{3}X\cdot 2\frac{1}{2}XY.$

8. Efectuați:

a) $(3X^5Y)^3;$ b) $(-2XYZ^4)^2;$ c) $(\sqrt{2}XY^3)^4;$ d) $(1{,}5ZY^3)^3.$

9. Efectuați:

a) $16X^3Y:(-2XY);$ b) $-6{,}4Y^2Z^3:0{,}4YZ;$ c) $2\sqrt{3}X^2Z^5:\sqrt{3}XZ^2;$ d) $7\frac{1}{3}X^3Y^3Z^3:\frac{1}{3}XYZ.$

Formăm capacitățile și aplicăm

10. Efectuați:

a) $7{,}3XY-8Y^3+2(0{,}5Y^3+XY)-ZY;$ b) $3\frac{1}{4}ZY+4\left(\frac{1}{8}ZY-Z^2\right)+3Z^2+XY.$

11. Efectuați: a) $3XY\cdot 0{,}2X^2Y^3Z-(2XY)^3+(1{,}2XY)^2\cdot XY;$

b) $-5ZY\cdot 0{,}4Z^3YX+(0{,}1ZY^2)^2\cdot X^3Y-(-XYZ)^3.$

12. Efectuați: a) $18X^3Y^5:0{,}3XY^4-(2X^2Y+4{,}8X^4Z:1{,}6XZ);$

b) $-9XY^3Z^2:30Y^2Z-(-7XYZ+12X^2Z^2:0{,}4XZ^2).$

13. Completați cu exponenți, astfel încît gradul monomului în raport cu toate nedeterminatele să fie 10:

a) $3X^{\square}Y^2Z^{\square};$ b) $(Y^2Z^3)^{\square};$ c) $(X^{\square}Y^{\square}Z)^3;$ d) $(-\sqrt{5}X^2Y^{\square}Z^{\square})^2.$

14. Determinați legitatea și scrieți monomul lipsă:

$\sqrt{2}X^2Y^3$	3	$2\sqrt{2}X^6Y^9$
$-\sqrt{3}ZY^5$	2	?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

15. a) Gradul monomului X^3YZ este egal cu 6.
b) Monomul XY^2Z^5 are gradul egal cu 8.
c) Monoamele XY şi X^2Y^2 sînt asemenea.
d) Monoamele $26X^2Y$ şi $-X^2Y$ se pot reduce.

16. Completați șirul monoamelor:
a) $XYZ,\ X^2YZ,\ X^2Y^2Z,\ \square$;
b) $X^8Y^4Z^2,\ X^8Y^4,\ X^8Y^2,\ \square$.

17. Completați cu exponenți, astfel încît gradul monomului obținut în raport cu toate nedeterminatele să fie un număr divizibil cu: 1) 3; 2) 5.
a) $((X^2Y^3)^{\square})^{\square}$;
b) $((XY^2Z)^{\square})^{\square}$.

§ 2. Polinoame. Operații cu polinoame

2.1. Noțiunea de polinom

INVESTIGĂM

• Fie expresiile algebrice raționale: $X^2;\ -X^3+X;\ X^2Y^5;\ X^5+X^4+2X^3+X^2+X+1;$ $ZY+XZ;\ XY-3X^2Y^2;\ Z^3+X-2;\ (XY)\cdot(ZX^2);\ X^{2016}-X^{2015};\ (Z^3Y^2)\cdot(7Z).$
a) Identificați monoamele.
b) Identificați produse de monoame.
c) Identificați sume de monoame.

Definiție

Se numeşte polinom o sumă algebrică de două sau mai multe monoame.

• Polinoamele pot avea una sau mai multe nedeterminate.
• Polinoamele se notează cu litere mari ale alfabetului latin (P, Q, R, H, ...).

Exemple

$P(X)=X^3-2X^2+5;\ Q(X,Y)=3X^2Y-XY+X;\ R(X,Y,Z)=XYZ-3.$

Exercițiu. Identificați şi notați polinoamele din secvența **INVESTIGĂM**.

• ***Coeficienții polinomului*** sînt coeficienții termenilor săi. Polinomul ai cărui coeficienți sînt egali cu 0 se numeşte ***polinomul nul***. Polinomul nul se notează cu 0. Polinomul care nu are nedeterminate se numeşte ***polinom constant***.
• Termenul care nu conține nedeterminată se numeşte ***termen liber***.
• Un polinom cu doi termeni se numeşte ***binom***, iar cu trei termeni – ***trinom***.

Observație. În continuare, vom considera, de regulă, polinoame de o nedeterminată.

INVESTIGĂM

• Fie monoamele: $7X \cdot X^3, 3X^2 \cdot (-5X^3), 8X \cdot X \cdot (-X), (X^3)^2, -7X, 5^2$.

a) Scrieți monoamele în forma canonică.

b) Stabiliți gradele monoamelor.

c) Scrieți polinomul $P(X)$ ca sumă a acestor monoame aranjate în ordinea descrescătoare a gradelor lor.

d) Scrieți polinomul $P(X)$ în forma canonică.

e) Stabiliți gradul polinomului $P(X)$.

f) Enumerați coeficienții polinomului $P(X)$ scris în forma canonică.

g) Determinați termenul liber.

Rezolvare:

a) $7X^4, -15X^5, -8X^3, X^6, -7X, 25$.

b) 4, 5, 3, 6, 1, 0.

c) $P(X) = X^6 + (-15X^5) + 7X^4 + (-8X^3) + (-7X) + 25$.

d) $P(X) = X^6 + (-15)X^5 + 7X^4 + (-8)X^3 + 0X^2 + (-7)X + 25$.

e) Polinomul $P(X)$ are gradul 6.

f) 1, –15, 7, –8, 0, –7, 25. g) 25.

Un polinom de o nedeterminată este scris în ***forma canonică*** (***standard***) dacă termenii lui se succed în ordinea descrescătoare a gradelor lor. Un polinom are o singură formă canonică.

Polinoamele cu aceeaşi formă canonică sînt ***egale***.

Gradul maxim al monoamelor unui polinom se consideră ***gradul polinomului***. Gradul polinomului $P(X)$ se notează **grad *P*(*X*)**. Pentru polinomul nul gradul nu se defineşte.

APLICĂM

Pentru polinomul $P(X) = 2X^3 - \sqrt{3}X - 1$ avem:

a) $P(X) = 2X^3 + 0X^2 + (-\sqrt{3})X + (-1) \longrightarrow$ forma canonică;

b) grad $P(X) = \square$;

c) $\square \longrightarrow$ termenul liber.

GENERALIZĂM

• Polinoamele de gradul I în X sînt de forma $P(X) = aX + b$, unde a şi b sînt numere reale, $a \neq 0$.

• Polinoamele de gradul II în X sînt de forma $P(X) = aX^2 + bX + c$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

• Polinoamele de gradul III în X sînt de forma $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$, unde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Forma canonică a unui polinom de o nedeterminată este:

$$P(X)=a_nX^n+a_{n-1}X^{n-1}+\ldots+a_2X^2+a_1X+a_0,\ \ a_n\neq 0.$$

Termenul a_nX^n se numeşte ***termenul principal*** al polinomului $P(X)$, numărul a_n se numeşte ***coeficientul dominant*** al polinomului $P(X)$, iar coeficientul a_0 – ***termenul liber***.

Observație. Pentru a simplifica scrierea polinoamelor concrete, convenim să nu scriem termenii polinomului care au coeficienții egali cu zero, să notăm termenii de forma $1X^k$ cu X^k, iar expresia de forma $+(-a)X^k$ – cu $-aX^k$. De exemplu, polinomul $X^4+(-5)X^3+1X^2+0X+3$ se scrie $X^4-5X^3+X^2+3$.

2.2. Valoarea numerică a polinomului

INVESTIGĂM

• Calculați valoarea numerică a polinomului $P(X, Y)=X^2Y-2XY$ pentru $X=1$, $Y=-3$.

Rezolvare:

$P(1,\ -3)=1^2\cdot(-3)-2\cdot 1\cdot(-3)=3.$

• Calculați valoarea numerică a polinomului $Q(X)=2X^3-X+5$ pentru $X=0$.

Rezolvare:

$Q(0)=2\cdot\square^3-\square+5=\square.$

Exercițiu. Formulați regula de calcul al valorii numerice a unui polinom.

APLICĂM

Calculați valoarea numerică a polinomului:

a) $P(X,Y,Z)=X^2-Y^2+Z^2$ pentru $X=0,\ \ Y=1,\ \ Z=-1$;

b) $Q(X)=-2X^7+X^5-1$ pentru $X=-1$.

Rezolvare:

a) $P(0,1,-1)=\square^2-\square^2+\square^2=\square$;

b) $Q(-1)=-2\square^7+\square^5-1=\square$.

2.3. Adunarea și scăderea polinoamelor

INVESTIGĂM

• Fie polinoamele $P(X)=-5X^4+3X^3-\sqrt{2}X+4$ și $Q(X)=2X^4-7X^3+X$.

Efectuați: a) $P(X)+Q(X)$; b) $P(X)-Q(X)$; c) $-Q(X)$.

Rezolvare:

a) $P(X)+Q(X)=(-5X^4+3X^3-\sqrt{2}X+4)+(2X^4-7X^3+X)=$

$=(-5X^4+2X^4)+(3X^3-7X^3)+(-\sqrt{2}X+X)+4=-3X^4-4X^3+(1-\sqrt{2})X+4.$

b) $P(X)-Q(X)=(-5X^4+3X^3-\sqrt{2}X+4)-(2X^4-7X^3+X)=$
$=(-5-2)X^4+(3+7)X^3+(-\sqrt{2}-1)X+4=-7X^4+10X^3-(1+\sqrt{2})X+4.$

c) $-Q(X)=-(2X^4-7X^3+X)=-2X^4+7X^3-X.$

• La adunarea (scăderea) a două polinoame se adună (se scad) termenii asemenea.
• Polinomul $-P(X)$ este ***opusul*** polinomului $P(X)$.

Proprietăți ale adunării polinoamelor

1° ***Comutativitatea***: $P(X)+Q(X)=Q(X)+P(X)$ pentru orice polinoame $P(X)$, $Q(X)$.

2° ***Asociativitatea***: $(P(X)+Q(X))+R(X)=P(X)+(Q(X)+R(X))$ pentru orice polinoame $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$.

3° Polinomul nul este element neutru la adunarea polinoamelor:
$P(X)+0=P(X)$ pentru orice polinom $P(X)$.

4° Orice polinom $P(X)$ are ***opusul*** său $-P(X)$: $P(X)+(-P(X))=0$.

2.4. Înmulțirea polinoamelor

INVESTIGĂM

• Fie polinoamele $P(X)=3X^2-X+1,\ Q(X)=X-1.$
Efectuați:
a) $-5X^3\cdot P(X)$;   b) $P(X)\cdot Q(X)$.

Rezolvare:

a) $-5X^3\cdot P(X)=-5X^3\cdot(3X^2-X+1)=-5X^3\cdot 3X^2+(-5X^3)\cdot(-X)+(-5X^3)\cdot 1=$
$(-5\cdot 3)X^3\cdot X^2+[-5\cdot(-1)]\cdot X^3\cdot X+(-5\cdot 1)\cdot X^3=-15X^5+5X^4-5X^3.$

b) $P(X)\cdot Q(X)=(3X^2-X+1)(X-1)=3X^2\cdot(X-1)-X\cdot(X-1)+1(X-1)=$
$3X^3-3X^2-X^2+X+X-1=3X^3-4X^2+2X-1.$

• La înmulțirea unui monom cu un polinom se înmulțește acest monom cu fiecare termen al polinomului dat. Suma produselor obținute este polinomul produs.

• La înmulțirea polinoamelor $P(X)$ și $Q(X)$ se înmulțește fiecare termen al polinomului $P(X)$ cu fiecare termen al polinomului $Q(X)$. Suma produselor obținute reprezintă polinomul produs $(P(X)\cdot Q(X))$.

• $\operatorname{grad}(P(X)\cdot Q(X))=\operatorname{grad}P(X)+\operatorname{grad}Q(X)$.

Proprietăți ale înmulțirii polinoamelor

1° ***Comutativitatea***: $P(X)\cdot Q(X)=Q(X)\cdot P(X)$ pentru orice polinoame $P(X)$, $Q(X)$.

2° ***Asociativitatea***: $(P(X)\cdot Q(X))\cdot R(X)=P(X)\cdot(Q(X)\cdot R(X))$ pentru orice polinoame $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$.

3° Produsul oricărui polinom cu ***polinomul nul*** este polinomul nul: $P(X)\cdot 0=0$ pentru orice polinom $P(X)$.

4° Polinomul 1 este ***element neutru*** la înmulțirea polinoamelor: $P(X)\cdot 1=1\cdot P(X)$ pentru orice polinom $P(X)$.

5° Înmulțirea polinoamelor este ***distributivă față de adunare*** (***scădere***): $P(X)(Q(X)\pm R(X))=P(X)\cdot Q(X)\pm P(X)\cdot R(X)$ pentru orice polinoame $P(X)$, $Q(X)$, $R(X)$.

APLICĂM

Fie polinoamele $P(X)=X^3+1$, $Q(X)=-2X^7$, $R(X)=X^4-1$.

Efectuați, scriind polinomul obținut în formă canonică:

a) $P(X)\cdot(Q(X)-R(X))$;

b) $P(X)\cdot Q(X)-P(X)\cdot R(X)$.

Comparați rezultatele obținute.

Rezolvare:

a) $P(X)\cdot(Q(X)-R(X))=(X^3+1)(-2X^7-X^4+1)=$

$X^3\cdot\square-X^3\cdot X^4+X^3\cdot 1-2X^7-X^4+1=\square\cdot X^{10}-\square-\square+\square+\square$;

b) $P(X)\cdot Q(X)-P(X)\cdot R(X)=(X^3+1)\cdot(-2X^7)-(X^3+1)\cdot(X^4-1)=$

$X^3\cdot(-2X^7)-2X^7-X^7+X^3-X^4+1=\square\cdot X^{10}-\square-\square+\square+\square$.

Concluzie: Polinoamele obținute sînt $\square$, deoarece au $\square$.

2.5. Descompunerea polinoamelor în factori ireductibili

INVESTIGĂM

• Descompuneți în factori ireductibili polinomul:

a) X^4+4X^2; b) X^3-3X^2+3X-9; c) X^3-1; d) $27X^3+1$; e) $2X^2+X-3$.

Rezolvare:

a) $X^4+4X^2=X^2\cdot X^2+4\cdot X^2=X^2\cdot(X^2+4)$;

b) $X^3-3X^2+3X-9=X\cdot X^2-3\cdot X^2+3\cdot X-3\cdot 3=$

$=X^2(X-3)+3(X-3)=(X-3)(X^2+3)$;

c) $X^3-1=(X-1)(X^2+X+1)$;

d) $27X^3+1=(3X)^3+1=(3X+1)(9X^2-3X+1)$;

e) Aflăm soluțiile ecuației $2x^2+x-3=0$, asociate trinomului. Obținem $x_1=1$, $x_2=-\frac{3}{2}$. Atunci $2X^2+X-3=2(X-1)\left(X+\frac{3}{2}\right)$. (Verificați!)

Deci, $2X^2+X-3=(X-1)\left(2\cdot X+2\cdot\frac{3}{2}\right)=(X-1)(2X+3)$.

Descompunerea în factori ireductibili a unui polinom constă în reprezentarea lui ca produs de două sau mai multe polinoame ireductibile de grad cel puțin egal cu 1. Polinomul este ***ireductibil*** dacă nu poate fi descompus în factori.

Polinoamele pot fi descompuse în factori aplicînd:

♦ ***metoda factorului comun***: $XY+XZ+XT=X(Y+Z+T)$;

♦ ***metoda grupării termenilor***: $XQ+YQ+XP+YP=(XQ+XP)+(YQ+YP)=$
$=X(Q+P)+Y(Q+P)=(Q+P)(X+Y)$;

♦ ***formulele de calcul prescurtat***:
- restrîngerea pătratului unei sume (diferențe): $X^2\pm 2XY+Y^2=(X\pm Y)^2$,
- restrîngerea cubului unei sume (diferențe): $X^3\pm 3X^2Y+3XY^2\pm Y^3=(X\pm Y)^3$,
- descompunerea diferenței pătratelor: $X^2-Y^2=(X-Y)(X+Y)$,
- descompunerea sumei (diferenței) cuburilor: $X^3\pm Y^3=(X\pm Y)(X^2\mp XY+Y^2)$;

♦ ***descompunerea în factori a trinomului de gradul II:***
$aX^2+bX+c=a(X-x_1)(X-x_2)$, unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației de gradul II $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$, numită ***ecuație asociată*** trinomului de gradul II;

♦ ***metode combinate***.

Observație. Formulele de calcul prescurtat sînt adevărate şi pentru polinoame.

APLICĂM

• Efectuați: a) $(2X^3+X)^2$; b) $(1-5X)^3$.

Rezolvare:

a) $(2X^3+X)^2=(2X^3)^2+2\cdot 2X^3\cdot X+X^2=\square+\square+X^2$;

b) $(1-5X)^3=\square^3-3\square+3\square-\square^3=\square-\square+\square-\square$.

• Aplicînd formulele şi metodele studiate, descompuneți în factori ireductibili polinomul:

a) X^6-16X^4; b) $X^3-5X^2+3X-15$; c) X^4-1;
d) $64X^3+1$; e) $(6X-5)^2-(5X-4)^2$; f) $0{,}2X^2-X-10$.

Rezolvare:

a) $X^6-16X^4=\square\cdot\square-16\cdot\square=X^4\cdot(\square-\square)$;

b) $X^3-5X^2+3X-15=\square\cdot X^2-5\cdot X^2+3X-3\cdot\square=$
$=X^2\cdot(\square-5)+\square\cdot(X-\square)=\square\cdot\square$;

c) $X^4 - 1 = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$;

d) $64X^3 + 1 = (4X)^3 + 1^3 = (4X + 1)(16X^2 - 4X + 1)$;

e) $(6X - 5)^2 - (5X - 4)^2 = [(6X - 5) - (5X - 4)][(\square - \square) + (\square - \square)] = \square \cdot \square$;

f) Aflăm soluțiile ecuației $0,2x^2 - x - 10 = 0$, asociate trinomului. Obținem $x_1 = -5$, $x_2 = 10$. Atunci $0,2X^2 - X - 10 = 0,2 \cdot \square \cdot \square$.

Deci, $0,2X^2 - X - 10 = 0,2(X + 5)(X - 10)$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie polinoamele $P(X) = X^3 - 3X^2 + \sqrt{2}X + 1$ şi $Q(X) = X^4 - X^3 + X^2 - X + \sqrt{5}$.

a) Enumerați coeficienții polinoamelor $P(X)$ şi $Q(X)$.

b) Stabiliți gradele monoamelor polinoamelor $P(X)$ şi $Q(X)$.

c) Precizați gradele polinoamelor $P(X)$ şi $Q(X)$.

d) Calculați valoarea numerică a polinomului $P(X)$ pentru $X = 2$.

e) Calculați valoarea numerică a polinomului $Q(X)$ pentru $X = -2$.

2. Fie polinoamele $P(X) = -X^4 - 8X^3 + X^2 - 3X$ şi $Q(X) = X^3 + 5X^2$.

1) Efectuați:

$P(X) + Q(X) = S(X)$; $\quad P(X) - Q(X) = D(X)$; $\quad Q(X) - P(X) = R(X)$.

Calculați şi comparați:

a) $S(3)$ cu $P(3) + Q(3)$; $\quad$ b) $D(-1)$ cu $P(-1) - Q(-1)$.

2) Precizați gradul fiecărui polinom: $S(X)$, $D(X)$, $R(X)$.

3) Stabiliți o relație între polinoamele $D(X)$ şi $R(X)$.

3. Fie polinoamele $P(X) = 5X^2 - 1$; $Q(X) = 5X^2 + 1$; $R(X) = X^4 + 2X^2 + 1$.

Aflați:

a) $P(X) + Q(X) - R(X)$; $\quad$ b) $P(X) \cdot Q(X)$; $\quad$ c) $P(X) \cdot R(X)$;

d) $P(X) \cdot Q(X) - R(X)$; $\quad$ e) $P^2(X)$; $\quad$ f) $P^2(X) \cdot Q^2(X)$.

4. Completați pînă la pătratul unui binom:

a) $16X^2 + \ldots + 1$; $\quad$ b) $9X^2 - \ldots + 25$; $\quad$ c) $X^2 + 10X + \ldots$; $\quad$ d) $3X^2 - \ldots + 64$.

5. Aplicînd metoda grupării termenilor, descompuneți în factori ireductibili:

a) $7X^4 - 9X^3 - 7X^2 + 9X$; $\quad$ b) $X^4 + X^3 - X^2 - X$; $\quad$ c) $X^3 - 5X^2 + 4X - 20$.

6. Restrîngeți:

a) $25X^2 - 10X + 1$; $\quad$ b) $0,25X^2 + X + 1$; $\quad$ c) $X^3 - 6X^2 + 12X - 8$; $\quad$ d) $X^3 + 3X^2 + 3X + 1$.

7. Aplicînd formulele diferența pătratelor, suma (diferența) cuburilor, descompuneți în factori polinomul:

a) $0,64X^2 - 1$; $\quad$ b) $5X^2 - 45$; $\quad$ c) $125X^3 - 64$; $\quad$ d) $729X^3 + 1$.

8. Descompuneți în factori trinomul:

a) $X^2 - 2X - 8$; $\quad$ b) $4X^2 - 3X - 1$; $\quad$ c) $-X^2 + X + 2$.

9. Fie polinoamele $P(X)=2X^3-X$ şi $Q(X)=X^2+1$.

a) $\operatorname{grad} P(X)>\operatorname{grad} Q(X)$.

b) $Q^2(X)=X^4+2X^2+1$.

c) $P(X)+Q(X)=2X^3+X^2-X+1$.

Formăm capacitățile și aplicăm

10. Fie polinoamele $P(X)=8X^3-X^2+10X-\sqrt{7}$ şi $Q(X)=mX^3+kX^2+pX+n$ $(m, n, k, p\in\mathbb{R})$.

a) Aflați valorile parametrilor reali m, n, k, p pentru care polinoamele $P(X)$ şi $Q(X)$ sînt egale.

b) Precizați gradele polinoamelor $P(X), Q(X)$.

c) Pentru care valori ale parametrilor reali m, n, k, p polinomul $Q(X)$ este nul?

d) Calculați: $P(-1), P(0), Q(-1), Q(0)$.

11. Fie polinoamele $P(X)=X^5-7kX^2+2X-k$ şi $Q(X)=-X^5+X^2-2X+k$.

a) Efectuați: $S(X)=P(X)+Q(X)$, $D(X)=P(X)-Q(X)$.

b) Precizați gradele polinoamelor $S(X)$, $D(X)$.

c) Aflați valoarea parametrului real k pentru care $P(X)$ este binom, iar $Q(X)$ – trinom.

d) Aflați valoarea parametrului real k pentru care $S(X)$ este un monom de gradul doi.

12. Aplicînd formulele studiate, descompuneți în factori ireductibili polinomul:

a) $(6X+3)^2-(5X-4)^2$; b) $8X^3-(X-5)^3$; c) $125X^3+(X+1)^3$.

13. Descompuneți în factori ireductibili polinomul:

a) $X^3+2X^2(X-2)-8$; b) X^6-4X^3+4;

c) $X^5-X^3+5X^2+5X$; d) X^4-X^2+2X+2.

14. Descompuneți în factori trinomul:

a) $8X^2+3X-0{,}5$; b) $-0{,}1X^2-X-20$; c) $X^2-\sqrt{5}X-2$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

15. Fie polinomul $R(X)=aX^3+bX^2+cX+d$, $a, b, c, d\in\mathbb{R}$.

a) Precizați gradul polinomului $R(X)$ în funcție de valorile parametrilor a, b, c, d.

b) Aflați valorile coeficienților a, b, c, d, dacă: $R(0)=1$, $R(-1)=0$, $R(1)=-1$, $a=c$.

16. Fie polinomul $P(X)=aX^4+2X^2+bX-X^3+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$.

a) Aflați valorile coeficienților a, b, c, ştiind că forma canonică a polinomului $P(X)$ este $5X^4-X^3+2X^2-8$.

b) Scrieți în forma canonică polinomul $Q(X)$, ştiind că $P(X)+Q(X)=0$.

17. Aflați valorile parametrilor reali a, b, c, d, e, ştiind că

$-P_1(X)\cdot P_2(X)=aX^4+bX^3+cX^2+dX+e$ şi $P_1(X)=X^2-1$, $P_2(X)=2X^2-X+5$.

18. Determinați polinoamele $P(X)$ de gradul doi cu coeficienți reali, astfel încît $P(\alpha^3)=(P(\alpha))^3$ pentru orice $\alpha\in\mathbb{R}$.

19. Descompuneți în factori ireductibili polinomul:

a) X^8+3X^4-4; b) $X^{4n}-16$, $n\in\mathbb{N}^*$; c) $X^{2n+1}-X$, $n\in\mathbb{N}^*$.

§ 3. Împărțirea polinoamelor

3.1. Împărțirea unui polinom la un polinom

INVESTIGĂM

• Fie polinomul $P(X)=4X^2+24X$ şi monomul $4X$.

Efectuați $P(X):(4X)$.

Rezolvare:

Descompunem în factori polinomul $P(X)$ şi obținem $P(X)=4X^2+24X=4X\cdot(X+6)$.
Atunci $P(X):(4X)=[4X\cdot(X+6)]:(4X)=X+6$.
Se spune că polinomul $C(X)=X+6$ este ***cîtul*** împărțirii polinomului $P(X)=4X^2+24X$ la monomul $4X$, deoarece $P(X)=4X\cdot C(X)$.

• Fie polinoamele $P(X)=X^3-5X^2-X+5$ şi $Q(X)=X^2-1$.

Efectuați $P(X):Q(X)$.

Rezolvare:

Descompunem polinomul $P(X)$ în factori şi obținem:

$P(X)=X^3-5X^2-X+5=X^2(X-5)-(X-5)=(X-5)(X^2-1)=(X^2-1)(X-5)$.

Deci, $P(X)=Q(X)\cdot(X-5)$. Atunci $P(X):Q(X)=[Q(X)\cdot(X-5)]:Q(X)=X-5$.

Astfel, polinomul $C(X)=X-5$ este *cîtul* împărțirii polinomului $P(X)=X^3-5X^2-X+5$ la polinomul $Q(X)=X^2-1$, deoarece $P(X)=Q(X)\cdot C(X)$.

Constatăm că $\operatorname{grad} C(X)=\operatorname{grad} P(X)-\operatorname{grad} Q(X)=3-2=1$.

Observație. Polinomul $Q(X)=X^2-1$ este, de asemenea, *cîtul* împărțirii polinomului $P(X)=X^3-5X^2-X+5$ la polinomul $C(X)=X-5$, deoarece $P(X)=C(X)\cdot Q(X)$.

3.2. Teorema împărțirii cu rest. Algoritmul împărțirii

INVESTIGĂM

• Fie polinoamele $P(X)=2X^3-3X^2+X+1$ şi $Q(X)=X^2+1$.

Determinați dacă polinomul $P(X)$ se împarte la polinomul $Q(X)$.

Rezolvare:

Presupunem că $P(X)$ se împarte la $Q(X)$, adică există un polinom $C(X)$, astfel încît

$$P(X)=Q(X)\cdot C(X). \qquad (1)$$

Cîtul $C(X)$ ar trebui să aibă gradul unu, deoarece

$$\operatorname{grad} C(X)=\operatorname{grad} P(X)-\operatorname{grad} Q(X)=3-2=1.$$

Polinomul de gradul unu $C(X)$ are forma $aX+b,\ a,\ b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$.

Atunci $P(X)=2X^3-3X^2+X+1=Q(X)\cdot(aX+b)=(X^2+1)(aX+b)=$
$=X^2\cdot aX+X^2\cdot b+aX+b=aX^3+bX^2+aX+b$.

Folosind noțiunea de egalitate a două polinoame, obținem sistemul $a=2,\ b=-3,$ $a=1,\ b=1,$ care nu are soluții. Deci, presupunerea făcută este falsă, adică nu există polinomul $C(X)$ care verifică (1).

Observăm că $P(X)=2X^3-3X^2+X+1=2X^3+2X-3X^2-3-X+4=$ $=2X(X^2+1)-3(X^2+1)-X+4=(2X-3)(X^2+1)+(-X+4).$

În acest caz se spune că la împărțirea polinomului $P(X)=2X^3-3X^2+X+1$ la polinomul $Q(X)=X^2+1$ am obținut ***cîtul*** $2X-3$ și ***restul*** $-X+4.$

Gradul restului $-X+4$ este 1 și este mai mic decît gradul împărțitorului $X^2+1,$ care este 2.

• Efectuați $(2X^3-3X^2+X+1):(X^2+1).$

Rezolvare:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2X^3 & -3X^2 & +X & +1 & X^2+1 \\ \cline{6-6}
- & 2X^3 & & +2X & & 2X-3 \\ \cline{2-5}
 & & -3X^2 & -X & +1 & \\
- & & -3X^2 & & -3 & \\ \cline{3-5}
 & & & -X & +4 &
\end{array}
$$

Vom descrie ***algoritmul împărțirii a două polinoame*** folosind acest exercițiu.

✓ Împărțim monomul $2X^3$ la monomul X^2 și obținem cîtul $2X.$

✓ Înmulțim $2X$ cu împărțitorul X^2+1 și obținem produsul parțial $2X^3+2X,$ pe care-l scădem din deîmpărțit.

✓ Coborîm 1 și obținem deîmpărțitul $-3X^2-X+1;$ împărțim monomul $-3X^2$ la monomul X^2 și obținem cîtul $-3.$

✓ Înmulțim -3 cu împărțitorul X^2+1 și scădem produsul parțial $-3X^2-3$ din $-3X^2-X+1.$

✓ Am obținut deîmpărțitul $-X+4,$ însă nu putem continua împărțirea, deoarece monomul X nu poate fi împărțit la monomul $X^2.$ Deci, cîtul este $2X-3,$ iar restul este $-X+4.$

Răspuns: $2X^3-3X^2+X+1=(X^2+1)\cdot(2X-3)+(-X+4).$

Observație. De regulă, se schimbă semnul fiecărui produs parțial, efectuîndu-se adunări ale deîmpărțitului cu opusul produsului parțial:

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
 & 2X^3 & -3X^2 & +X & +1 & X^2+1 \\ \cline{6-6}
+ & -2X^3 & & -2X & & 2X-3 \\ \cline{2-5}
 & & -3X^2 & -X & +1 & \\
+ & & +3X^2 & & +3 & \\ \cline{3-5}
 & & & -X & +4 &
\end{array}
$$

Teorema 1 (teorema împărțirii cu rest)

Fie polinoamele $P(X)$ și $Q(X),\ Q(X)\neq 0,$ cu coeficienți numere reale. Atunci există polinoamele $C(X)$ și $R(X)$, astfel încît:

a) $P(X)=Q(X)\cdot C(X)+R(X),$ unde $R(X)=0$ sau $\operatorname{grad} R(X)<\operatorname{grad} Q(X);$

b) polinoamele $C(X)$ și $R(X)$ sînt unic determinate.

APLICĂM

• Efectuați $P(X):Q(X)$, știind că $P(X)=X^4+3X^3-X^2+5X+2$,
$Q(X)=X^2-5X-4$.

Rezolvare:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
 X^4 & +\ 3X^3 & -\ \ X^2 & +\ \ 5X & +\ 2 & & X^2-5X-4 \\ \cline{7-7}
+\ -X^4 & +\ 5X^3 & +\ 4X^2 & & & & X^2+\square X+4\square \\ \cline{1-4}
 & \square X^3 & +\ \square X^2 & +\ \ 5X & & & \\
 & +\ -\square X^3 & +\ \square X^2 & +\ \square X & & & \\ \cline{2-5}
 & & \square X^2 & +\ \square X & +\ 2 & & \\
 & & +\ -\square X^2 & +\ \square X & +\ \square & & \\ \cline{3-5}
 & & & \square X & +\ \square & &
\end{array}$$

Deci,
$P(X)=X^4+3X^3-X^2+5X+2=(X^2-5X-4)\cdot(X^2+8X+43)+252X+174$, unde
cîtul este $C(X)=X^2+8X+43$, iar restul $R(X)=252X+174$.

$\text{grad}\, Q(X)=2$, $\text{grad}\, R(X)=1$, deci $\text{grad}\, R(X)<\text{grad}\, Q(X)$.

Observație. Dacă restul $R(X)$ al împărțirii $P(X):Q(X)$ este un polinom de gradul 0 (o constantă), vom nota $R(X)=r$.

3.3. Împărțirea unui polinom la binomul $X-\alpha$

INVESTIGĂM

• Fie polinomul $P(X)=X^2-4X+9$ și binomul $Q(X)=X+1$.
a) Efectuați $P(X):Q(X)$; b) Aflați $P(-1)$.

Rezolvare:

a)
$$\begin{array}{rrr|l}
 X^2 & -4X & +9 & X+1 \\ \cline{4-4}
+\ -X^2 & -\ \ X & & X-5 \\ \cline{1-3}
 & +\ -5X & +9 & \\
 & 5X & +5 & \\ \cline{2-3}
 & & 14 &
\end{array}$$

Deci, $C(X)=X-5$ este cîtul, iar $R(X)=14$ – restul împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X)$.

b) $P(-1)=(-1)^2-4\cdot(-1)+9=14$. Observăm că $R(X)=P(-1)=14$.

• Fie polinomul $P(X)$ și binomul $Q(X)=X-\alpha$.
Aflați dacă este adevărată propoziția: „Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-\alpha$ este egal cu valoarea polinomului $P(X)$ pentru $X=\alpha$, adică $R(X)=P(\alpha)$”.

Rezolvare:

Să împărțim polinomul $P(X)$ la binomul $X-\alpha$. Conform teoremei împărțirii cu rest, obținem:

a) $P(X)=(X-\alpha)C(X)+R(X)$, unde $C(X)$ este cîtul, iar $R(X)$ – restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X-\alpha$;

b) $\text{grad}\, R(X) < \text{grad}(X-\alpha)$.

Însă $\text{grad}(X-\alpha)=1$, deci $\text{grad}\, R(X)=0$, adică polinomul $R(X)$ este o constantă: $R(X)=r$.

Aşadar, $P(X)=(X-\alpha)C(X)+r$.

Pentru $X=\alpha$ obținem $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)\cdot C(\alpha)+r \Leftrightarrow r=R(X)=P(\alpha)$.

Deci, $R(X)=P(\alpha)$ este o propoziție adevărată. Astfel, am demonstrat

Teorema 2 (teorema lui Bézout[1])

Restul împărțirii unui polinom $P(X)$ la binomul $X-\alpha$ este egal cu valoarea numerică a acestui polinom pentru $X=\alpha$, adică $R(X)=P(\alpha)$.

APLICĂM

• Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)=X^4+mX^2+mX-1$ la binomul $X-m$, ştiind că la împărțirea polinomului $P(X)$ la binomul $X-1$ restul este –6.

Rezolvare:

Din condiția $P(1)=-6$ (conform teoremei lui Bézout) obținem:

$1^4+m\cdot 1^2+m\cdot 1-1=-6 \Leftrightarrow 2m=-6 \Leftrightarrow m=-3$.

Deci, polinomul $P(X)$ are forma X^4-3X^2-3X-1.

Restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $X+3$ este, conform teoremei lui Bézout, $P(-3)=(-3)^4-3\cdot(-3)^2-3\cdot(-3)-1=62$.

Răspuns: $r=62$.

Observație. Un polinom $P(X)$ se împarte exact (fără rest) la binomul $X-\alpha$, dacă $P(\alpha)=0$.

Exerciții şi probleme

Fixăm cunoştințele

1. Aflați dacă este adevărată propoziția $P(X)=Q(X)\cdot C(X)+R(X)$, unde:

a) $P(X)=X^2-7X-13$, $Q(X)=X-4$, $C(X)=X+3$, $R(X)=-1$.

b) $P(X)=X^3-10X^2-X-10$, $Q(X)=X^2-1$, $C(X)=X+10$, $R(X)=3$.

c) $P(X)=2X^4+X^3+2X+1$, $Q(X)=2X^2+1$, $C(X)=X^2-X$, $R(X)=X+3$.

2. Fie polinomul $P(X)=X^3+X^2-5X-5$.

Efectuați:

a) $P(X):(X-1)$ şi comparați restul cu $P(1)$;

b) $P(X):(X+1)$ şi comparați restul cu $P(-1)$;

c) $P(X):X$ şi comparați restul cu $P(0)$;

d) $P(X):(2X+1)$ şi comparați restul cu $P\left(-\frac{1}{2}\right)$.

[1] Etienne Bézout (1730–1783) – matematician francez.

3. Folosind teorema lui Bézout, aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$, dacă:

a) $P(X)=X^2+2X+1,\ Q(X)=X+1$;
b) $P(X)=-3X^2+X,\ Q(X)=X-5$;
c) $P(X)=8X+2,\ Q(X)=X+3$;
d) $P(X)=3X^3-X+81,\ Q(X)=X-3$;
e) $P(X)=-2X^4+X^3+X^2+2,\ Q(X)=X+1$;
f) $P(X)=X^3+X^2-X+8,\ Q(X)=X+2$.

Formăm capacitățile și aplicăm

4. Efectuați $P(X):Q(X)$, dacă:

a) $P(X)=X^3-3X^2+X-9,\ Q(X)=X^2$;
b) $P(X)=2X^3-X^2+4,\ Q(X)=X^3-X$;
c) $P(X)=-5X^3+X^2-X+4,\ \ Q(X)=X^3+1$;
d) $P(X)=X^5-X^3+X,\ \ Q(X)=X^2-1$;
e) $P(X)=2X^3+X^2+5X+60,\ Q(X)=X+3$.

5. Determinați cîtul și restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$, dacă:

a) $P(X)=X^4+X^3+X^2+X,\ Q(X)=X+2$;
b) $P(X)=-5X^4-X^3+X^2-2X-6,\ Q(X)=X-1$;
c) $P(X)=2X^5-3X^4+4X^3+X^2+2,\ Q(X)=X-4$;
d) $P(X)=X^8+2X^4+1,\ Q(X)=X+1$;
e) $P(X)=X^4+X^3+X+1,\ Q(X)=X-3$;
f) $P(X)=X^6-125,\ Q(X)=X-\sqrt{5}$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

6. Aflați valorile parametrilor reali a, b, știind că există binomul $P(X)$, astfel încît:
$(X^3-aX^2-bX+1):P(X)=X^2-X+1$.

7. Determinați polinomul $P(X)$, dacă se știe că el satisface simultan condițiile:
a) restul împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X)=X^3-2$ este egal cu pătratul cîtului acestor polinoame;
b) $P(-2)+P(2)+34=0$.

8. Aflați valorile parametrului real a, astfel încît r să fie restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$:

a) $P(X)=X^3+a^2X^2+3aX+1,\ Q(X)=X-1,\ r=12$;
b) $P(X)=X^3+a^2X^2+3aX+1,\ Q(X)=X-1,\ r=6$;
c) $P(X)=aX^3+a^2X^2+3a+1,\ Q(X)=X+1,\ r=0$.

• *Problemă pentru campioni*

9. Împărțind polinomul $P(X)=X^3-aX^2+bX-1$, pe rînd, la $Q_1(X)=X,\ Q_2(X)=X+1,\ Q_3(X)=X-2$, se obține același rest. Aflați restul împărțirii lui $P(X)$ la $Q(X)=X^2-3$.

§ 4. Rădăcinile polinoamelor

INVESTIGĂM

• Fie polinomul $P(X) = X^3 - 5X^2 + 4X$. Aflați numerele reale α, astfel încît $P(\alpha) = 0$.

Rezolvare:

Ecuația $x^3 - 5x^2 + 4x = 0$ se numește ***ecuație asociată*** polinomului $P(X)$. Rezolvăm ecuația și obținem soluțiile $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 4$. (Confirmați!)

Atunci $P(0) = 0,\ P(1) = 0,\ P(4) = 0$. Numerele 0, 1, 4 sînt rădăcini ale polinomului $P(X)$.

Definiție

Numărul real α se numește **rădăcină** a polinomului $P(X)$ dacă valoarea numerică a polinomului $P(X)$ în α este egală cu 0, adică $P(\alpha) = 0$.

Observație. Pentru a afla ***rădăcinile unui polinom***, aflăm ***soluțiile ecuației asociate*** acestuia.

APLICĂM

• Aflați rădăcinile polinomului $P(X) = X^3 - 3X - 2$.

Rezolvare:

Rezolvăm ecuația $x^3 - 3x - 2 = 0$, asociată polinomului $P(X) = X^3 - 3X - 2$.

Obținem $x^3 - 3x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x^3 - 4x) + (x - 2) = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 4) + (x - 2) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)[x(x+2)+1] = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x^2 + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 2$ sau $x = -1$. Prin urmare, rădăcinile polinomului $P(X)$ sînt 2 și -1.

Rădăcina $\alpha = 2$ este *rădăcină simplă*, iar rădăcina $\alpha = -1$ este *rădăcină dublă* pentru polinomul $P(X) = X^3 - 3X - 2 = (X-2)(X+1)^2$.

Definiții

♦ Numărul $m,\ m \in \mathbb{N}^*$, se numește **ordinul de multiplicitate** al rădăcinii α a polinomului $P(X)$ dacă $P(X)$ se împarte la $(X-\alpha)^m$ și nu se împarte la $(X-\alpha)^{m+1}$.

♦ Dacă $m = 1$, atunci α se numește **rădăcină simplă**; dacă $m \geq 2$, atunci α se numește **rădăcină multiplă de ordin *m*** a polinomului $P(X)$.

Rădăcina unui polinom care are ordinul de multiplicitate 2 (respectiv 3) se numește ***rădăcină dublă*** (respectiv ***triplă***).

Exemplu

Numărul $\alpha = -2$ este rădăcină triplă a polinomului $Q(X) = (X+2)^3(X+\sqrt{5})$, deoarece $Q(X)$ se împarte la $(X+2)^3$, dar nu se împarte la $(X+2)^4$.

Teorema 3

Fie $P(X)$ un polinom nenul. Numărul real α este rădăcină a polinomului $P(X)$ dacă și numai dacă polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $X - \alpha$.

Demonstrație

Fie α o rădăcină a polinomului $P(X)$, adică $P(\alpha)=0$. Atunci din teorema împărțirii cu rest pentru polinoame rezultă că restul împărțirii lui $P(X)$ la $X-\alpha$ este zero şi deci polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $X-\alpha$.

Reciproc, fie polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $X-\alpha$. Atunci există un polinom $C(X)$, astfel încît $P(X)=(X-\alpha)\cdot C(X)$ şi $P(\alpha)=(\alpha-\alpha)C(\alpha)=0$. Deci, $P(\alpha)=0$, adică α este rădăcină a polinomului $P(X)$. ▶

APLICĂM

• Fie polinoamele $P(X)=3X^2-X-2$ şi $Q(X)=X-1$.

Determinați dacă polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $Q(X)$.

Rezolvare:

Numărul real 1 este rădăcină a polinomului $P(X)$. Deoarece $P(1)=0$, conform teoremei 3, obținem că polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $Q(X)=X-1$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Determinați care dintre numerele –1; –0,5; 0; 2; 5 sînt rădăcini ale polinomului:

a) $P(X)=-3X^2-X^2+2$; b) $Q(X)=5X^5-3X^3+2X^2$;

c) $R(X)=(X-5)(X-0{,}5)(X-2)$; d) $H(X)=X^4-1$.

2. Scrieți un polinom de gradul doi, astfel încît numerele:

a) $-\frac{1}{4}$ şi $-\frac{3}{4}$; b) $\sqrt{2}$ şi $2\sqrt{2}$; c) –1 şi 5

să fie rădăcinile acestuia.

3. *Adevărat* sau *Fals*?

a) $\alpha=-2$ este rădăcină a polinomului $P(X)=X^5-X^4+8X$.

b) $\alpha=-3$ este rădăcină a polinomului $Q(X)=-X^3+6X^2-81$.

c) $\alpha=0$ este rădăcină a polinomului $H(X)=X^{20}-X^{10}+X-1$.

d) $\alpha=\frac{1}{2}$ este rădăcină a polinomului $R(X)=2X^4+3X^2-X+5$.

4. Fie polinoamele:

a) $P(X)=3X^2-X-2$ şi $Q(X)=X-1$; b) $P(X)=X^5-X^2+X$ şi $Q(X)=X$;

c) $P(X)=-0{,}2X^3-X^2+4$ şi $Q(X)=X+3$.

Determinați dacă polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $Q(X)$.

Formăm capacitățile și aplicăm

5. Completați, astfel încît polinomul obținut:

1) să aibă două rădăcini reale simple;

2) să aibă o rădăcină reală multiplă de ordinul 2;

3) să nu aibă rădăcini reale.

a) $P(X)=4X^2-4X+\square$; b) $P(X)=\square X^2-10X+25$;

c) $P(X)=3X^2+\square X+1$; d) $P(X)=X^2-\square X-\square$.

6. Aflați rădăcinile reale ale polinomului:

a) $P(X)=3X^4-X^2-2$; b) $P(X)=X^3-5X^2+6X$;

c) $P(X)=27X^3-1$; d) $P(X)=16X^4-64$.

7. a) Scrieți un polinom de gradul doi care să aibă o rădăcină dublă;

b) scrieți un polinom de gradul trei care să aibă o rădăcină triplă;

c) scrieți un polinom de gradul trei care să aibă o rădăcină simplă și o rădăcină dublă.

8. Fie polinoamele: a) $P(X)=X^3-X^2-X-1$ și $Q(X)=X+1$;

b) $P(X)=X^3-X^2-X-1$ și $Q(X)=X-1$;

c) $P(X)=X^4-3X^3-X^2+9$ și $Q(X)=X-3$.

Determinați dacă polinomul $P(X)$ se împarte exact la binomul $Q(X)$.

9. Determinați ordinul de multiplicitate al rădăcinii $\alpha=-5$ a polinomului:

a) $P(X)=X^2+10X+25$; b) $P(X)=X^3+15X^2+75X+125$; c) $P(X)=X^4-625$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

10. Fie polinomul $P(X)=(3a+b)X^2+6X(a-b)+11$.

a) Determinați numerele reale a și b, astfel încît $P(X)=-2X^2-5X+11$.

b) Aflați rădăcinile polinomului $P(X)$.

11. Aflați coeficienții reali a și b, dacă se știe că polinomul $P(X)=X^4-5X^3+8X^2+aX+b$ se împarte fără rest la polinomul $Q(X)=(X-1)^2$.

• ***Problemă pentru campioni***

12. Fie polinomul $P(X)=X^4+aX^3+bX+c$, $a, b, c\in\mathbb{R}$. Demonstrați că nu există numerele reale a, b, c, astfel încît polinomul $P(X)$ să se împartă exact la polinomul $Q(X)=X^3-X$.

§ 5. Operații cu fracții algebrice. Recapitulare și completări

5.1. Noțiunea de fracție algebrică

INVESTIGĂM

• Fie fracția algebrică $\dfrac{X^3(1+X)}{(X+1)^2(4X-X^3)}$.

a) Aflați domeniul valorilor admisibile în $\mathbb{R}$ al fracției algebrice.

b) Aflați valoarea fracției algebrice pentru $X=\sqrt{3}$.

Rezolvare:

a) Aflăm rădăcinile polinomului – numitorul fracției algebrice, rezolvînd ecuația asociată acestuia:

$$(x+1)^2(4x-x^3)=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2(4-x^2)=0 \Leftrightarrow x(x+1)^2(2-x)(2+x)=0.$$

Polinomul – numitorul fracției algebrice are rădăcinile $-2,\ -1,\ 0,\ 2$. Prin urmare, DVA în $\mathbb{R}$ al acestei fracții este $\mathbb{R}\setminus\{-2, -1, 0, 2\}$.

b) Înlocuim în fracția algebrică X cu $\sqrt{3}$ și obținem:

$$\frac{(\sqrt{3})^3(1+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+1)^2[4\sqrt{3}-(\sqrt{3})^3]}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}=\frac{3}{\sqrt{3}+1}=\frac{3\cdot(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=1{,}5(\sqrt{3}-1).$$

Definiție

Raportul a două polinoame se numește **fracție algebrică** sau **fracție rațională**.

Domeniul valorilor admisibile (se notează DVA) al unei fracții raționale cu o nedeterminată într-o mulțime dată $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ este submulțimea mulțimii date în care numitorul fracției nu se anulează.

Valoarea fracției algebrice în x_0 este raportul valorilor numărătorului și numitorului acesteia pentru $X=x_0$.

5.2. Operații cu fracții algebrice

5.2.1. Simplificarea și amplificarea fracțiilor algebrice

INVESTIGĂM

• Fie polinoamele $P(X)=X(1-X^2)$ și $Q(X)=(X+1)(X-4X^3)$.

a) Scrieți fracția algebrică $\frac{P(X)}{Q(X)}$.

b) Aflați DVA al fracției algebrice $\frac{P(X)}{Q(X)}$.

c) Simplificați $\frac{P(X)}{Q(X)}$, astfel încît să obțineți o fracție ireductibilă de forma $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$.

d) Aflați DVA al fracției algebrice $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$.

e) Comparați DVA al fracțiilor algebrice $\frac{P(X)}{Q(X)}$ și $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$.

f) Amplificați pe DVA fracția algebrică $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ cu polinomul $R(X)=X^3+1$.

Rezolvare:

a) $\frac{P(X)}{Q(X)}=\frac{X(1-X^2)}{(X+1)(X-4X^3)}$.

b) $(x+1)(x-4x^3)=0 \Leftrightarrow x+1=0$ sau $x(1-4x^2)=0$. Soluțiile ecuațiilor sînt $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=-0{,}5$, $x_4=0{,}5$. (Verificați.)

Deci, DVA al fracției obținute în a) este $\mathbb{R}\setminus\{-0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 1\}$.

c) $$\frac{P(X)}{Q(X)}=\frac{X(1-X)(1+X)}{X(X+1)(1-4X^2)}^{(X(X+1)}=\frac{-(X-1)}{1-4X^2}=\frac{X-1}{4X^2-1}=\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}.$$

d) $4x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-0{,}5$ sau $x=0{,}5$. Pentru $\frac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ DVA este $\mathbb{R}\setminus\{-0{,}5;\ 0{,}5\}$.

e) Pentru $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ DVA este $\mathbb{R}\setminus\{-0,5;\ 0;\ 0,5;\ 1\}$, iar pentru $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ DVA este $\mathbb{R}\setminus\{-0,5;\ 0,5\}$. Deci, DVA al fracțiilor $\dfrac{P(X)}{Q(X)}$ şi $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}$ este diferit.

f) $\dfrac{P_1(X)}{Q_1(X)}\cdot\dfrac{R(X)}{R(X)} \overset{X^3+1)}{=} \dfrac{X-1}{4X^2-1}=\dfrac{(X-1)(X^3+1)}{(4X^2-1)(X^3+1)}=\dfrac{X^4-X^3+X-1}{4X^5-X^3+4X^2-1}.$

A simplifica (***a amplifica***) o fracție algebrică înseamnă a împărți (a înmulți) numărătorul şi numitorul fracției la (cu) acelaşi polinom de grad cel puțin egal cu 1. Prin simplificarea (amplificarea) unei fracții algebrice se obține o fracție egală cu cea dată în domeniul valorilor admisibile al celor două fracții.
Prin simplificarea (amplificarea) unei fracții algebrice se poate modifica DVA.

Definiții

- Fracția algebrică care se poate simplifica se numeşte **reductibilă**.
- Fracția algebrică care nu se poate simplifica se numeşte **ireductibilă**.

APLICĂM

Simplificați fracția algebrică $\dfrac{1-X^3}{X^3+X^2+X}$.

Rezolvare:

DVA: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\dfrac{1-X^3}{X^3+X^2+X}=\dfrac{1-X^3}{X(X^2+X+1)}=\dfrac{(1-X)(X^2+X+1)}{X(X^2+X+1)}=\dfrac{1-X}{X}.$

Răspuns: $\dfrac{1-X^3}{X^3+X^2+X}=\dfrac{1-X}{X}.$

5.2.2. Adunarea fracțiilor algebrice

INVESTIGĂM

- Efectuați în DVA: a) $\dfrac{X}{X^2-4}+\dfrac{2}{4-X^2}$; b) $\dfrac{1}{3X+1}+\dfrac{1}{9X^2-3X+1}$.

Rezolvare:

a) DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-2,\ 2\}$.

$$\frac{X}{X^2-4}+\frac{2}{4-X^2}=\frac{X}{X^2-4}+\frac{2}{-(X^2-4)}=\frac{X}{X^2-4}-\frac{2}{X^2-4}=\frac{X-2}{X^2-4}^{(X-2}=\frac{1}{X+2}.$$

b) DVA: $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$. $\dfrac{1}{3X+1}+\dfrac{1}{9X^2-3X+1}=\dfrac{9X^2-3X+1+3X+1}{(3X+1)(9X^2-3X+1)}=\dfrac{9X^2+2}{27X^3+1}.$

Rezultatul adunării a două fracții algebrice cu acelaşi numitor este o fracție algebrică care are numitorul egal cu numitorul fracțiilor date şi numărătorul egal cu suma algebrică a numărătorilor fracțiilor algebrice.

Pentru a aduna pe DVA două fracții algebrice cu numitori diferiți, fracțiile se aduc la același numitor, apoi rezultatele se adună ca fracții cu același numitor.
Dacă rezultatul adunării fracțiilor algebrice este o fracție algebrică reductibilă, atunci se execută simplificări pînă se obține o fracție algebrică ireductibilă.

5.2.3. Înmulțirea și împărțirea fracțiilor algebrice. Puteri ale fracțiilor algebrice cu exponent întreg

INVESTIGĂM

• 1) Aduceți la forma cea mai simplă:

a) $\dfrac{X+3}{X^2+6X+9}\cdot\dfrac{X^2-9}{27-X^3}$; b) $\dfrac{X^3-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{3}X+3}:\dfrac{X^2+\sqrt{2}X+2}{X^3+3\sqrt{3}}$; c) $\left(\dfrac{X-1}{X^2}\right)^3$.

2) Comparați domeniile valorilor admisibile ale expresiilor inițiale cu domeniul valorilor admisibile al produsului final.

Rezolvare:

1) a) DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-3, 3\}$.

$$\frac{X+3}{(X+3)^2}\cdot\frac{(X-3)(X+3)}{(3-X)(9+3X+X^2)}=\frac{(X+3)^2(X-3)}{(X+3)^2(3-X)(X^2+3X+9)}^{((X+3)^2(3-X)}=$$

$$=-\frac{1}{X^2+3X+9}.$$ DVA al produsului este $\mathbb{R}$.

b) DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-\sqrt{3}\}$.

$$\frac{X^3-2\sqrt{2}}{X^2-\sqrt{3}X+3}:\frac{X^2+\sqrt{2}X+2}{X^3+3\sqrt{3}}=\frac{X^3-(\sqrt{2})^3}{X^2-\sqrt{3}X+3}\cdot\frac{X^3+(\sqrt{3})^3}{X^2+\sqrt{2}X+2}=$$

$$=\frac{(X-\sqrt{2})(X^2+\sqrt{2}X+2)(X+\sqrt{3})(X^2-\sqrt{3}X+3)}{(X^2+\sqrt{2}X+2)(X^2-\sqrt{3}X+3)}=(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{3})=$$

$=X^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})X-\sqrt{6}$. DVA al cîtului este $\mathbb{R}$.

c) DVA: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\left(\dfrac{X-1}{X^2}\right)^3=\dfrac{(X-1)^3}{(X^2)^3}=\dfrac{X^2-3X^2+3X-1}{X^6}$. DVA al rezultatului obținut este $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2) Domeniile valorilor admisibile ale expresiilor inițiale diferă de domeniile valorilor admisibile ale expresiilor finale în cazurile a), b) şi nu diferă în cazul c).

Pentru a afla produsul a două fracții algebrice, se înmulțesc numărătorii şi numitorii între ei.
Pentru a împărți două fracții algebrice, se înmulțeşte prima fracție cu inversa celei de a doua fracții.
Deoarece produsul fracțiilor algebrice este o fracție ireductibilă, este posibil ca expresia inițială şi fracția finală să aibă domenii ale valorilor admisibile diferite.

Observație. În mulțimea fracțiilor algebrice, operațiile cu puteri cu exponenți întregi se execută ca și operațiile cu puteri cu exponenți întregi în mulțimea numerelor raționale reprezentate prin litere.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Aflați DVA al perechilor de fracții algebrice:

a) $\frac{X+5}{4}$ și $\frac{X-6}{2}$; b) $\frac{1}{X-3}$ și $\frac{X}{X+3}$; c) $\frac{X-4}{3X+6}$ și $\frac{3X-1}{X^2+2X}$.

2. Scrieți fiecare sumă de două fracții algebrice din exercițiul **1** sub formă de fracție ireductibilă.

3. Precizați DVA al fracțiilor ireductibile obținute în **2**.

4. Calculați valoarea fracției obținute ca rezultat al adunării fracțiilor din exercițiul **1 c)** pentru:

a) $X=-1$; b) $X=0{,}25$; c) $X=2$.

Formăm capacitățile și aplicăm

5. Efectuați pe DVA:

a) $\frac{X+3}{X^2+2X}+\frac{X-3}{4-X^2}$; b) $\frac{(X+4)^2}{X^2+4X}+\frac{(X-4)^2}{X^2-4X}$; c) $\frac{3-X^2}{9-X^2}+\frac{X+3}{X-3}$;

d) $\frac{-125}{X^2-5X}+\frac{X^2}{X-5}$; e) $\frac{X^3}{X^2-64}-\frac{X}{X-8}+\frac{2}{X+8}$; f) $\left(\frac{1}{X-1}\right)^{-1}+\frac{X}{X+1}-\frac{X+2}{X^2-1}$.

6. Scrieți sub formă de fracție algebrică ireductibilă pe DVA:

a) $\frac{2X-6}{X^2}\cdot\frac{X^3}{X-3}$; b) $\frac{\sqrt{3}X^2}{2X-2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}X-2}{3X^3}$; c) $\frac{X^2-100}{2X^5}\cdot\frac{-X^2}{X-10}$;

d) $(X^2-4):\frac{(X+2)^2}{X-2}$; e) $\frac{(Y-5)^2}{3Y+18}:\frac{3Y^2-75}{Y^2-36}$; f) $\left(\frac{X^2-4}{X}\right)^{-2}:\frac{X^2+1}{X-2}$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

7. Aduceți la forma cea mai simplă pe DVA:

a) $\left(X-\frac{3}{X-1}\right)\cdot\left(\frac{2(1-X)}{6+2X-2X^2}\right)$;

b) $(X^2-3X+2)X\cdot\left(\frac{3X}{X-2}-\frac{1}{X-1}-\frac{1}{X^2-3X+2}\right)$;

c) $\left(\frac{8X^3+1}{8X^2+1}\right)^{-1}\cdot\frac{4X^2-2X+1}{4X^2-1}\cdot(1-2X)^2$;

d) $\frac{4X^2-1}{8X^3+1}:\left(\frac{4X^2-4X+1}{4X^2-2X+1}\cdot\frac{1}{2X+1}\right)$.

8. Fie $E(X)=\frac{X^2+3X+2}{X-2}$.

a) Scrieți expresia sub forma $E(X)=aX+b+\frac{c}{X-2}$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Determinați coeficienții a,b,c.

b) Determinați $a\in\mathbb{Z}$, astfel încît $E(a)\in\mathbb{Z}$.

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. Scrieți în forma canonică şi determinați gradul polinomului:

a) $P(X)=6X^2-3-7X^3-2X^2+3$; b) $Q(Y)=7Y^3-8-6Y^2+3Y+4Y^2-7Y^3+20$.

2. Scrieți în forma canonică suma, diferența şi produsul polinoamelor $P(X)$ şi $Q(X)$:

a) $P(X)=3X^2$; $Q(X)=2X^2-10X+4$; b) $P(X)=-X^2-1$; $Q(X)=-3X^3+6X+2$.

3. Scrieți în forma canonică:

a) $(3X+2)^3$; b) $(-\sqrt{3}+Y)^3$; c) $(3Y-1)(9Y^2+3Y+1)$; d) $(3X+1)(9X^2-3X+1)$.

4. Determinați care dintre elementele mulțimii $\{-2, -1, 0, 1, 3, 5\}$ sînt rădăcini ale polinomului:

a) $P(X)=X^3-25X$; b) $P(X)=X^3-2X^2-X-2$; c) $P(X)=X^3-4X^2+3X$.

Formăm capacitățile și aplicăm

5. Descompuneți în factori polinomul:

a) $4X^2+4X+1$; b) $Z^2-Z+0{,}25$; c) $9X^2+42X+49$; d) $9X^2-6X+1$.

6. Aplicînd formulele studiate, descompuneți în factori ireductibili polinomul:

a) $16Y^2-25(Y+4)^2$; b) $(2X-9)^2-81$; c) $64X^3+1$; d) Z^6-125.

7. Descompuneți în factori ireductibili grupînd termenii polinomului:

a) $X^2-5X+X-5$; b) $2Y^3-4Y^2+Y-2$; c) X^3-X^2-8X+8; d) $X^3+X^2+\sqrt{3}X+\sqrt{3}$.

8. Aflați cîtul şi restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)$:

a) $P(X)=X^2+X-20$, $Q(X)=X-4$; b) $P(X)=6X^3+X^2-29X+20$, $Q(X)=2X-3$.

9. Aplicînd teorema lui Bézout, determinați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)=X-\alpha$, dacă:

a) $P(X)=2X^3+4X+1$, $\alpha=1$; b) $P(X)=-3X^4-5X^2+6X-21$, $\alpha=-2$.

10. Stabiliți dacă polinomul $P(X)$ se împarte exact la polinomul $Q(X)$:

a) $P(X)=X^4-64$, $Q(X)=X+4$; b) $P(X)=2X^3-5X+1$, $Q(X)=(X-3)(X+1)$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

11. Aflați valorile parametrului real a, știind că polinomul $P(X)$ se împarte exact la polinomul $Q(X)$:

a) $P(X)=2X^3-5X^2+aX+a$, $Q(X)=X-3$;

b) $P(X)=aX^3+3X^2+(a-1)X-2$, $Q(X)=(X-2)(X+2)$.

12. Efectuați pe DVA $\left(\dfrac{1}{X^2-3X}+\dfrac{1}{X}+\dfrac{1}{X-3}\right)^{-3}$.

13. Fie x_1 și x_2 rădăcinile polinomului $P(X)=2X^2-3X-5$. Aflați:

a) $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$; b) $x_1^2+x_2^2$; c) $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}$.

14. Scrieți polinomul $Q(X)$ în forma canonică, știind că rădăcinile lui sînt egale cu inversele rădăcinilor polinomului $P(X)=3X^2+X-15$.

• ***Problemă pentru campioni***

15. Fie $P(X)$ un polinom cu coeficienți reali, cu gradul cel mult egal cu 2, astfel încît $P(\alpha)=0$ pentru $\alpha\in\{1, 2, 3\}$. Demonstrați că $P(X)$ este polinomul nul.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. Fie polinomul
$P(X)=5X^2-(X^4-4X^2-X)-1.$

a) Scrieți polinomul în forma canonică. **2 p**

b) Completați caseta: **1 p**

grad $P(X)=\square$.

c) Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)=X-1$ fără a efectua împărțirea. **2 p**

d) Aflați rădăcinile polinomului $P(X)-Q(X)$. **5 p**

e) Determinați $C(X)$ și $R(X)$, astfel încît $P(X)=(X^2-1)\cdot C(X)+R(X)$. **6 p**

2. Fie expresia $E(X)=\frac{4}{X^2+8}-\frac{3}{X^2+5}$.

a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă: **1 p**

„DVA al expresiei $E(X)$ este $\mathbb{R}$”.

A **F**

b) Aflați valorile reale ale lui X pentru care $E(X)\neq 0$. **4 p**

c) Aduceți expresia $E(X):(2X^2+16)^{-1}$ la forma cea mai simplă. **4 p**

d) Aflați $E(\alpha)$, dacă α este rădăcina pozitivă a polinomului $P(X)=X(X^2-4)$. **5 p**

Varianta II

1. Fie polinomul
$P(X)=3X^2-(X^3+X^2-X)+1.$

a) Scrieți polinomul în forma canonică.

b) Completați caseta:

grad $P(X)=\square$.

c) Aflați restul împărțirii polinomului $P(X)$ la binomul $Q(X)=X+1$ fără a efectua împărțirea.

d) Aflați rădăcinile polinomului $P(X)-Q(X)$.

e) Determinați $C(X)$ și $R(X)$, astfel încît $P(X)=(X^2+1)\cdot C(X)+R(X)$.

2. Fie expresia $E(X)=\frac{5}{X^2+6}-\frac{4}{X^2-5}$.

a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă:

„DVA al expresiei $E(X)$ este $\mathbb{R}$”.

A **F**

b) Aflați valorile reale ale lui X pentru care $E(X)\neq 0$.

c) Aduceți expresia $E(X):(2X^2+12)^{-1}$ la forma cea mai simplă.

d) Aflați $E(\alpha)$, dacă α este rădăcina negativa a polinomului $P(X)=X(X^2-9)$.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	30–29	28–26	25–23	22–18	17–14	13–9	8–7	6–5	4–3	2–0

Capitolul

4 Ecuații. Sisteme de ecuații

§ 1. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de ecuație cu o necunoscută

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2x - 3 = 5$; b) $x^2 + 8 = 0$; c) $0{,}25x(8x + 4) + 5 = 2(x^2 + 0{,}5x + 2) + 1$.

Rezolvare:

a) DVA: $\mathbb{R}$. $2x - 3 = 5 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4$. $S = \{4\}$.

b) DVA: $\mathbb{R}$. $x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -8$. $S = \varnothing$.

c) DVA: $\mathbb{R}$. $0{,}25x(8x + 4) + 5 = 2(x^2 + 0{,}5x + 2) + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \square = \square \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. $S = \mathbb{R}$.

• Fie ecuațiile $2(x - 3)(x + 1) = 0$ şi $2x^2 - 4x - 6 = 0$.
Stabiliți dacă ele sînt echivalente.

Rezolvare:

DVA al ambelor ecuații este $\mathbb{R}$. $2(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ sau $x = -1$. $S_1 = \{-1, 3\}$.
Mulțimea soluțiilor ecuației $2x^2 - 4x - 6 = 0$ este $S_2 = \{-1, 3\}$.
Deci, $2(x - 3)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 4x - 6 = 0$, deoarece mulțimile soluțiilor lor sînt egale: $S_1 = S_2 = \{-1, 3\}$.

Definiție

Egalitatea de forma $A(x) = B(x)$, unde $A(x)$, $B(x)$ sînt expresii în care apare necunoscuta x, se numeşte **ecuație cu necunoscuta x**.

Observație. Ecuația poate fi cu mai multe necunoscute. De exemplu, $5x - 3y = 3$ este o ecuație cu două necunoscute, $3u + 2v - 5t = 0$ este o ecuație cu trei necunoscute.

Definiție

Valoarea necunoscutei care transformă ecuația într-o propoziție adevărată se numeşte **soluție** a ecuației.

Mulțimea soluțiilor ecuației se notează cu S.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.
O ecuație poate avea o mulțime finită sau infinită de soluții sau poate să nu aibă soluții.

Observație. Rezolvarea unei ecuații începe, de regulă, cu determinarea domeniului valorilor admisibile al acesteia.

Definiție
Mulțimea valorilor necunoscutei (necunoscutelor) pentru care au sens toate expresiile din ecuație se numeşte **domeniul valorilor admisibile** (DVA) al ecuației.

Definiție
Două ecuații cu aceeaşi necunoscută (aceleaşi necunoscute) se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sînt egale.

Între ecuațiile echivalente se scrie simbolul „$\Leftrightarrow$”.

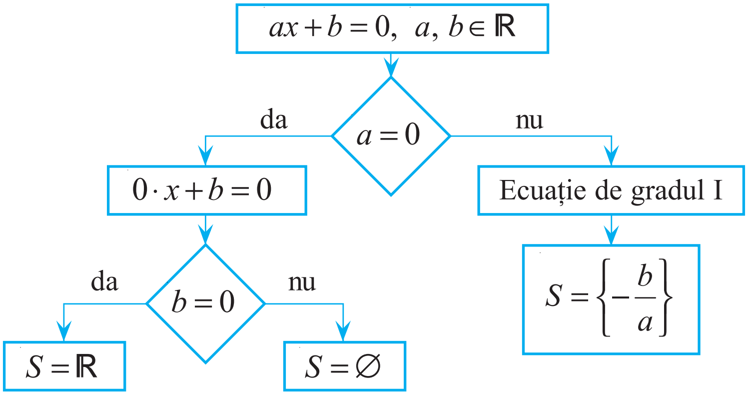
Observație. Ecuațiile echivalente ce se rezolvă într-o mulțime (de regulă, în DVA al ecuației inițiale) se numesc ***echivalente în această mulțime***.

1.2. Ecuații de gradul I cu o necunoscută

• Aplicînd următoarele relații de echivalență, bazate pe proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale, obținem ecuații echivalente:

1. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow B(x)=A(x)$.
2. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)\pm C(x)=B(x)\pm C(x)$, unde expresia $C(x)$ are sens pentru orice $x\in$ DVA al ecuației inițiale.
3. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)\cdot C(x)=B(x)\cdot C(x)$, unde expresia $C(x)$ are sens şi $C(x)\neq 0$ pentru orice $x\in$ DVA al ecuației inițiale.
4. $A(x)=B(x) \Leftrightarrow \dfrac{A(x)}{C(x)}=\dfrac{B(x)}{C(x)}$, unde expresia $C(x)$ are sens şi $C(x)\neq 0$ pentru orice $x\in$ DVA al ecuației inițiale.

Schema rezolvării ecuației de forma $ax+b=0,\ a, b\in\mathbb{R}$



Definiții

- Ecuația de forma $ax+b=0$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numeşte **ecuație de gradul I cu o necunoscută**.
- a, b se numesc **coeficienții ecuației**.

Ecuația de gradul I cu o necunoscută are ***soluția unică*** numărul $-\frac{b}{a}$. Deci, $S=\left\{-\frac{b}{a}\right\}$.

1.3. Ecuații reductibile la ecuația de gradul I cu o necunoscută

Unele ecuații pot fi reduse la ecuații de gradul I cu o necunoscută cu ajutorul unor substituții sau aplicînd relațiile de echivalență.

Exemplu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $x^2-2x+3=x(x+2)-5$; b) $\frac{2x}{x+3}=\frac{5x}{x+3}-9$.

Rezolvare:

a) DVA: ______ .

$x^2-2x+3=x(x+2)-5 \Leftrightarrow$ $\longrightarrow$ desfacem parantezele

$\Leftrightarrow x^2-2x+3=x^2+2x-5 \Leftrightarrow$ $\longrightarrow$ aplicăm relația de echivalență 2

$\Leftrightarrow -4x=-8 \,|:(-4) \Leftrightarrow$ $\longrightarrow$ aplicăm relația de echivalență 4

$\Leftrightarrow x=2.$

Răspuns: $S=$ ______ .

b) DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$. Notînd $\frac{x}{x+3}=t$, obținem ecuația de gradul I

$$2t=5t-9 \Leftrightarrow 3t-9=0$$

cu necunoscuta t, care are soluția 3. Revenind la necunoscuta x, obținem în DVA:

$$\frac{x}{x+3}=3 \Leftrightarrow x=3(x+3) \Leftrightarrow x=-4{,}5.$$

Cercetăm dacă soluția obținută aparține DVA: $-4{,}5 \in \mathbb{R}\setminus\{-3\}$; deci, $-4{,}5 \in$ DVA.

Răspuns: $S=\{-4{,}5\}$.

1.4. Ecuații de gradul I cu o necunoscută, cu parametru (opțional)

Ecuațiile de gradul I cu o necunoscută pot conține *parametru*. În acest caz, este necesară o discuție asupra existenței soluțiilor ecuației în funcție de valorile parametrului.

Exemplu

Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $mx-3=2x+5m$, unde m este un parametru real.

Rezolvare:

DVA: $\mathbb{R}$. $mx-3=2x+5m \Leftrightarrow x(m-2)=5m+3 \Leftrightarrow (m-2)x=5m+3$.

- Dacă $m=2$, ecuația devine $0\cdot x=13$. Deci, ecuația nu are soluții.
- Dacă $m \neq 2$ $(m\in\mathbb{R}\setminus\{2\})$, obținem $x=\frac{5m+3}{m-2}$.

Răspuns: Pentru $m=2$, $S=\varnothing$; pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, $S=\left\{\frac{5m+3}{m-2}\right\}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Recunoașteți ecuațiile de gradul I:

a) $2x-1=0$; b) $3(x-1)=5$; c) $\frac{1}{x-1}=2$; d) $x^2-x=0$;

e) $3x=0$; f) $6x=-4$; g) $2x+\frac{1}{x}+3=0$; h) $-\sqrt{5}x+2{,}5=0$.

2. Determinați care dintre elementele mulțimii $\{-2;\ -1;\ 0;\ 1{,}5;\ 5\}$ este soluție a ecuației:

a) $3x-2=x-6$; b) $\frac{x+1}{x}=1$; c) $(x+2)(x-5)=0$;

d) $x(x+1{,}5)=0$; e) $\frac{2x-1}{x-2}=2$; f) $x(x+1{,}5)(x-5)=0$.

3. Aflați DVA al ecuației:

a) $2(x-5)-4=5x+1$; b) $\frac{3}{x-5}=4$; c) $x(x+3)=0$.

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2x-1=0$; b) $-\frac{3}{4}x=\frac{1}{5}$; c) $0{,}5x+4=0$;

d) $3-2x=0$; e) $1{,}4+2x=0$; f) $-\frac{5}{7}x-\frac{1}{3}=0$.

5. Aflați zeroul funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=3x-1$; b) $f(x)=2-6x$; c) $f(x)=-\sqrt{19}x$; d) $f(x)=\sqrt{5}x-2\sqrt{5}$.

6. Aflați rădăcinile polinomului:

a) $P(X)=3X-0{,}5$; b) $P(X)=-8X+\sqrt{8}$; c) $P(X)=-0{,}3X-2{,}8$.

Formăm capacitățile și aplicăm

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2(x-1)+3(x+2)=5x+4$; b) $6-3(2-x)+4x=7-x$;

c) $-1{,}4(5-x)+2{,}5(2+x)=-3{,}6+x$; d) $5+7(1-x)-5x=x-8$.

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația cu ajutorul unei substituții:

a) $\frac{4}{x-5}=7-\frac{3}{x-5}$; b) $-\frac{3(x+2)}{x}=\frac{2(x+2)}{x}+5$;

c) $\frac{5t}{t+1}=-\frac{1}{2}+\frac{3t}{t+1}$; d) $\frac{0{,}5a+1{,}5}{2a}=9-\frac{a+3}{a}$.

9. Completați, astfel încît propoziția obținută să fie adevărată:

a) $3(x-1)-2x=4 \Leftrightarrow 2x+5=\boxed{\quad}-x$; b) $4x+2(1-x)=\boxed{\quad}\Leftrightarrow x-3(x+4)=5-2x$.

10. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$-3(1-z)=4z-8$	30	$2z-3(4-z)=12+z$
$2,(5)t-\frac{2}{3}(t+1)=0$	?	$\frac{2}{9}(2-t)-4,(6)t=6$

11. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$2(5-3x)+4x=7-x$	81	$8-(3-4x)-x=17$
$9\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}x\right)-5x=8$	?	$14-2(x+5)+3x=6$

12. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile și determinați cuvîntul cifrat.

Ecuația	R	A	B	O	V
$3x-5=10$	-5	$\frac{5}{3}$	5	3	$-\frac{5}{3}$
$-x+6{,}5=x+0{,}5$	3	7	0	$\frac{7}{2}$	$-\frac{7}{2}$
$12-x=3(x-4)$	0	6	12	-6	-3
$\sqrt{3}\cdot x=0$	$-\sqrt{3}$	2	1	$\sqrt{3}$	0
$x^2-2=x(x-0{,}2)$	2	$0{,}2$	-10	10	1

Dezvoltăm capacitățile și creăm

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(3x-1)^2-4(5x+6)=9(x^2-x+1)+2$; b) $\frac{1}{2}(1-5x)+4(x^2-4)-\frac{3}{4}=\frac{5}{8}(2-x)+4x^2-3x$;

c) $2x^3-x+3=5(x+\frac{2}{5}x^3-2)-4x$; d) $3x(x^2-x+1)-4x=5x^2+2(1-x^2)+3x^3-x$;

e) $(4x-1)(4x+1)-5x=-4(x-4x^2)-7(x+3)$.

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|x|=2x+1$; b) $|2-x|=-0{,}5x+4$; c) $|2x+1|=-x$; d) $\frac{2}{3}|5t-1|=\frac{1}{3}t+2$.

15. Știind că m este un parametru real, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $mx-6=3x+4$; b) $3-mx=2m(x+1)-1$;

c) $mx+m+3=x+4$; d) $2(mx+x)-3(x+4)=5-m$.

16. Formulați un exercițiu asemănător cu exercițiul **12** și propuneți-l colegilor.

§ 2. Ecuații de gradul II cu o necunoscută

2.1. Formula de rezolvare

1 Un teren de forma unui triunghi dreptunghic trebuie îngrădit. Se știe că lungimea uneia dintre catetele triunghiului este cu 5 m mai mică decît lungimea ipotenuzei, iar lungimea celeilalte catete este cu 3 m mai mică decît lungimea primei catete. Aflați lungimea gardului.

Rezolvare:

Fie x lungimea ipotenuzei. Atunci $(x-5)$ este lungimea unei catete, iar $(x-8)$ – lungimea celeilalte catete. Conform condiției problemei și teoremei lui Pitagora, obținem ecuația $(x-5)^2+(x-8)^2=x^2 \Leftrightarrow x^2-26x+89=0$, cu soluțiile $x_1=13-4\sqrt{5}$, $x_2=13+4\sqrt{5}$.

Constatăm că numai $13+4\sqrt{5}$ satisface condiția problemei. (Precizați de ce $13-4\sqrt{5}$ nu satisface condiția problemei.) Deci, lungimea ipotenuzei este de $(13+4\sqrt{5})$ cm. Atunci lungimile catetelor sînt de $(5+4\sqrt{5})$ m și $(8+4\sqrt{5})$ m. Deci, gardul are lungimea de $(26+12\sqrt{5})$ m.

Răspuns: $(26+12\sqrt{5})$ m.

Ecuația $x^2 - 26x + 89 = 0$ este o ecuație de gradul II cu o necunoscută.

NE AMINTIM

Definiții

- Ecuația de forma $ax^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, se numește **ecuație de gradul II cu necunoscuta *x***.
- Numerele a, b, c se numesc **coeficienții ecuației** de gradul II; c se mai numește **termenul liber**.

Mulțimea soluțiilor ecuației se notează cu S.

A rezolva o ecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.

I. Cazuri particulare ale ecuației de gradul II

1. $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c = 0$	**2.** $a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$	**3.** $a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0$
$\boldsymbol{ax^2 + bx = 0}$ $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x(ax + b) = 0.$ $S = \left\{0, -\dfrac{b}{a}\right\}.$	$\boldsymbol{ax^2 + c = 0}$ $S = \varnothing$, dacă $a \cdot c > 0$; $S = \left\{-\sqrt{-\dfrac{c}{a}}, \sqrt{-\dfrac{c}{a}}\right\}$, dacă $a \cdot c < 0$.	$\boldsymbol{ax^2 = 0}$ $ax^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = 0.$ $S = \{0\}.$

APLICĂM

- Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $-x^2 + 0{,}5x = 0$; b) $\sqrt{2}x^2 + 1 = 0$; c) $-2x^2 + 5 = 0$; d) $\sqrt{5}x^2 = 0$.

Rezolvare:

a) $-x^2 + 0{,}5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 0{,}5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ sau $x = 0{,}5$. *Răspuns*: $S = \{0;\ 0{,}5\}$.

b) $\sqrt{2}x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2 = -1$. *Răspuns*: $S = \varnothing$.

c) $-2x^2 + 5 = 0 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow$ ______ $\Leftrightarrow x =$ ______ sau $x =$ ______. *Răspuns*: $S =$ ______.

d) $\sqrt{5}x^2 = 0 \Leftrightarrow x =$ ______. *Răspuns*: $S =$ ______.

Observație. Împărțind coeficienții oricărei ecuații de gradul II $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, la coeficientul a, obținem ecuația echivalentă $x^2 + px + q = 0$, numită ***ecuație de gradul II, forma redusă***, unde $p = \dfrac{b}{a}$, iar $q = \dfrac{c}{a}$.

II. Cazul general: $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0}$

Existența și numărul soluțiilor reale ale ecuației de gradul II sau ale ecuației de gradul II, forma redusă, depind de semnul discriminantului $\Delta = b^2 - 4ac$, respectiv $\Delta_1 = \dfrac{p^2}{4} - q$.

$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$			$x^2+px+q=0$		
$\Delta=b^2-4ac$			$\Delta_1=\dfrac{p^2}{4}-q$		
$\Delta>0$	$\Delta<0$	$\Delta=0$	$\Delta_1>0$	$\Delta_1<0$	$\Delta_1=0$
$x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	Nu are soluții în $\mathbb{R}$.	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x_1=-\dfrac{p}{2}-\sqrt{\Delta_1}$, $x_2=-\dfrac{p}{2}+\sqrt{\Delta_1}$	Nu are soluții în $\mathbb{R}$.	$x=-\dfrac{p}{2}$
$S=\left\{\dfrac{-b\mp\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	$S=\varnothing$	$S=\left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$	$S=\left\{-\dfrac{p}{2}\mp\sqrt{\Delta_1}\right\}$	$S=\varnothing$	$S=\left\{-\dfrac{p}{2}\right\}$

APLICĂM

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2x^2-3x-2=0$; b) $x^2-11x+30=0$.

Rezolvare:

a) DVA: $\mathbb{R}$. $\Delta=b^2-4ac=25$.

$$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\cdot 2}=-\frac{1}{2};\quad x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\cdot 2}=2.$$

Răspuns: $S=\{-0,5;\ 2\}$.

b) DVA: $\mathbb{R}$. $\Delta_1=\dfrac{p^2}{4}-q=\dfrac{1}{4}$.

$$x_1=\square-\square=\square;\quad x_2=\square+\square=\square.$$

Răspuns: $S=\{5,\ 6\}$.

Observație. În cazul în care coeficientul b este un număr par, adică $b=2k,\ k\in\mathbb{Z}^*$, ecuația de gradul II ia forma $ax^2+2kx+c=0,\ a\neq 0$. Discriminantul acestei ecuații este

$$\Delta=(2k)^2-4ac=4(k^2-ac)$$

şi formulele de rezolvare devin: $x_1=\dfrac{-k-\sqrt{k^2-ac}}{a}$, $x_2=\dfrac{-k+\sqrt{k^2-ac}}{a}$.

APLICĂM

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $2x^2-8x+3=0$.

Rezolvare:

DVA: $\mathbb{R}$. Ştiind că $a=2,\ c=3,\ b=-8=2\cdot(-4)$, obținem:

$$k=-4,\ \Delta_1=k^2-ac=16-6=10.$$

Atunci $x_1=\dfrac{-(-4)-\sqrt{10}}{2}=2-0,5\sqrt{10}$, $x_2=\dfrac{\square+\sqrt{\square}}{2}=\square+\square$.

Răspuns: $S=\{2-0,5\sqrt{10},\ 2+0,5\sqrt{10}\}$.

2.2. Relații între soluții și coeficienți

NE AMINTIM

Teorema lui Viète

Fie ecuația $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$ (1)

Dacă numerele reale x_1 și x_2 sînt soluțiile ecuației (1), atunci:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}. \end{cases} \qquad (2)$$

Fie ecuația $x^2+px+q=0.$ (3)

Dacă numerele reale x_1 și x_2 sînt soluțiile ecuației (3), atunci:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-p, \\ x_1\cdot x_2=q. \end{cases} \qquad (4)$$

Folosind relațiile lui Viète (2), (4), soluțiile unor ecuații de gradul II cu o necunoscută pot fi determinate fără a rezolva efectiv ecuația.

APLICĂM

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $2x^2-3x-2=0;$ b) $x^2-7x+12=0.$

Rezolvare:

a) Aflăm două numere reale $x_1,\ x_2,$ astfel încît $x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=-1$ și $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{3}{2}.$

Prin încercări, obținem $x_1=-\dfrac{1}{2},\ x_2=2.$

Răspuns: $S=\{-0{,}5;\ 2\}.$

b) Aflăm două numere reale $x_1,\ x_2,$ astfel încît $x_1\cdot x_2=q=\square$ și $x_1+x_2=-p=\square.$

Prin încercări, obținem $x_1=3,\ x_2=4.$

Răspuns: $S=\{3,\ 4\}.$

NE AMINTIM

Reciproca teoremei lui Viète

Dacă numerele reale x_1 și x_2 verifică relațiile (2), atunci $x_1,\ x_2$ sînt soluțiile ecuației (1).

Dacă numerele reale x_1 și x_2 verifică relațiile (4), atunci $x_1,\ x_2$ sînt soluțiile ecuației (3).

Observație. Folosind reciproca teoremei lui Viète, dacă se cunosc soluțiile x_1 și x_2, poate fi formată o ecuație de gradul II cu o necunoscută.

APLICĂM

• Scrieți o ecuație de gradul II cu o necunoscută care are soluțiile $x_1=-5,\ x_2=2.$

Rezolvare:

Cum $-5+2=-3=-p$ și $(-5)\cdot 2=-10=q,$ obținem ecuația $x^2+3x-10=0.$

2.3. Ecuații reductibile la ecuația de gradul II cu o necunoscută

Unele ecuații mai complicate pot fi reduse la ecuații de gradul II prin introducerea unei necunoscute auxiliare.

De exemplu, ecuațiile de forma $ax^4+bx^2+c=0,\ a\neq 0,$ numite ***ecuații bipătrate***, se rezolvă efectuînd substituția $x^2=t,$ unde $t\geq 0.$ În consecință, obținem ecuația de gradul II $at^2+bt+c=0,\ a\neq 0.$ Revenind apoi la necunoscuta x, obținem soluțiile ecuației inițiale.

APLICĂM

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2x^4-x^2-1=0;$ b) $(x^2-3x)^2+3(x^2-3x)-28=0.$

Rezolvare:

a) DVA: $\mathbb{R}$. Fie $x^2=t,\ t\geq 0.$ Obținem ecuația $2t^2-t-1=0$, cu soluțiile $t_1=-\frac{1}{2},\ t_2=1.$ Ecuația $x^2=-\frac{1}{2}$ nu are soluții reale, iar soluțiile ecuației $x^2=1$ sînt $x_1=-1,\ x_2=1.$

Răspuns: $S=\{-1, 1\}$.

b) DVA: $\mathbb{R}$. Notăm $x^2-3x=z.$ Obținem ecuația de gradul II $z^2+3z-28=0$, cu soluțiile $z_1=-7,\ z_2=4.$ Revenind la necunoscuta x, obținem ecuațiile $x^2-3x=-7$ și $x^2-3x=4.$

Ecuația $x^2-3x+7=0$ nu are soluții reale.

Ecuația $x^2-3x-4=0$ are soluțiile $x_1=-1,\ x_2=4.$

Răspuns: $S=\{-1, 4\}$.

2.4. Descompunerea în factori a expresiilor de forma $ax^2+bx+c,\ a\neq 0$

NE AMINTIM

Dacă $a\neq 0$ și $\Delta\geq 0,$ atunci $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ (5), unde x_1 și x_2 sînt soluțiile reale ale ecuației $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$

APLICĂM

• Descompuneți în factori expresia $2x^2-3x-2.$

Rezolvare:

Ecuația $2x^2-3x-2=0$ are soluțiile $x_1=-\frac{1}{2},\ x_2=2.$

Prin urmare, $2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=(2x+1)(x-2).$

2.5. Ecuații de gradul II cu o necunoscută, cu parametru (opțional)

Ecuațiile de gradul II cu o necunoscută pot conține *parametru*. În acest caz, este necesară o discuție asupra existenței soluției ecuației în funcție de valorile parametrului.

• Determinați valorile parametrului real m pentru care ecuațiile $x^2+mx+4=0$ şi $x^2+4x+m=0$ au o soluție reală comună.

Rezolvare:

Fie x_1 soluția comună. Substituind $x=x_1$, obținem $x_1^2+mx_1+4=0$ şi $x_1^2+4x_1+m=0$.
Prin scădere, obținem $x_1(m-4)+4-m=0 \Leftrightarrow (m-4)x_1=m-4$.
Pentru $m=4$ ecuațiile devin identice: $x_1^2+4x_1+4=0$. Soluția lor comună este $x_1=-2$.
Pentru $m\neq 4$ obținem $x_1=1$. Înlocuind $x_1=1$ în una dintre ecuații, obținem $m=-5$.
Atunci ecuațiile devin $x^2-5x+4=0$ şi $x^2+4x-5=0$, cu soluțiile $x_1=1,\ x_2=4$ şi respectiv $x_3=1,\ x_4=-5$.

Răspuns: Pentru $m=4$ ecuațiile au soluția comună $x=-2$, iar pentru $m=-5$ soluția lor comună este $x=1$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Fie ecuațiile:
a) $5x^2-x^2-\sqrt{2}=0$; b) $3{,}4x^2-x+1-\sqrt{2}=0$; c) $(1-\sqrt{3})x^2+7x-3{,}5=0$.
Găsiți numărul care lipseşte:
a) 5; ___; $-\sqrt{2}$; b) –3,4; -1; ___; c) ___; 7; – 3,5.

2. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $x^2-16=0$; b) $t^2-25=0$; c) $5x^2+2x=0$; d) $2x^2-x=0$;
e) $\sqrt{3}x^2+5=0$; f) $2x^2+14=0$; g) $\frac{1}{3}x^2=0$; h) $\sqrt{3}x^2=0$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $4x^2+4x+1=0$; b) $5x^2-7x+2=0$; c) $3x^2-2x+1=0$;
d) $-4x^2+6x-5=0$; e) $0{,}1x^2-x-2{,}5=0$; f) $\sqrt{5}x^2+\sqrt{2}x+4=0$.

4. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația de gradul II, forma redusă:
a) $x^2-2x+1=0$; b) $x^2-8x+12=0$; c) $x^2+\frac{5}{6}x+\frac{1}{6}=0$;
d) $x^2+1\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}=0$; e) $x^2-3x-4=0$; f) $x^2-\sqrt{3}x+6=0$.

5. Fără a rezolva ecuația, determinați semnele soluțiilor acesteia:
a) $3x^2-x-2=0$; b) $x^2+x-12=0$; c) $-t^2+2t+8=0$; d) $u^2-10u+4=0$.

Formăm capacitățile și aplicăm

6. Scrieți o ecuație de gradul II cu soluțiile:
a) 1 şi 3; b) –4 şi 5; c) –1 şi –2; d) $\frac{1}{2}$ şi $\frac{3}{4}$;
e) –3 şi 3; f) 2,5 şi 3,5; g) $2-\sqrt{3}$ şi $2+\sqrt{3}$; h) $-1-\sqrt{2}$ şi $-1+\sqrt{2}$.

7. Folosind teorema lui Viète, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $x^2-2x-15=0$; b) $3x^2-x-2=0$; c) $2x^2+x-1=0$; d) $x^2-4x+5=0$.

8. Descompuneți în factori expresia:
a) x^2-2x-3; b) $2x^2-x-3$; c) $3x^2+x-1$;
d) $-3x^2-5x-2$; e) $-x^2+3x+4$; f) $2x^2-3x+1$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{x^2-5x}{x-4}=\frac{4}{4-x}$; b) $\frac{x^2-2x}{x^2-1}=\frac{1}{1-x^2}$; c) $\frac{3{,}5x^2}{x+2}=\frac{4x+6}{2+x}$.

10. Fie x_1 și x_2 soluțiile ecuației:

1) $5x^2+3x-9=0$; 2) $-3x^2-x+1=0$; 3) $2{,}8x^2+2x-3{,}5=0$.

Fără a rezolva ecuația, calculați:

a) x_1+x_2; b) $x_1\cdot x_2$; c) $x_1^2+x_2^2$; d) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$.

11. Aflați două numere pozitive, știind că media lor aritmetică este 12,5, iar media geometrică este 10.

12. Suma unui număr real cu întreitul inversului acestuia este 4. Aflați numărul. Găsiți toate soluțiile.

13. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $\sqrt{3}x^2+4x+\sqrt{3}=0$; b) $\sqrt{3}x^2+2\sqrt{7}x+\sqrt{3}=0$; c) $(2x+1)^2=(4x+1)^2$;

d) $(1-3x)^2=(x+2)^2$; e) $5x^2-2\sqrt{5}x+1=0$; f) $(x-\sqrt{2})^2=(2\sqrt{2}+3x)^2$.

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația bipătrată:

a) $x^4-5x^2+4=0$; b) $x^4+5x^2+4=0$; c) $a^4-a^2-2=0$;

d) $2x^4-3x^2+1=0$; e) $\frac{5}{3}z^4+\frac{1}{3}z^2-2=0$; f) $-t^4-7t^2+8=0$.

15. Rezolvînd ecuația, determinați legitatea și aflați numărul omis:

a)

$x^2+3x+2=0$	$\boxed{5}$
$x^2-3\sqrt{2}x+4=0$	$\boxed{?}$

b)

$3t^2+4t+1=0$	$\boxed{\frac{8}{9}}$
$2t^2-3t-1=0$	$\boxed{?}$

16. Calculați cu aproximație de 0,01 soluțiile ecuației:

a) $2x^2-x-1=0$; b) $x(x-4)=6$; c) $x^2-3x+1=0$; d) $3x(x+1)-5=0$.

17. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

a) $x(x-\sqrt{7})=0$; b) $4x^2-4x+1=0$; c) $\sqrt{11}x^2=0$;

d) $-3x^2+x+4=0$; e) $x^2-x-1=0$; f) $x^2-x-20=0$.

18. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuațiile și ordonați cuvintele de mai jos în funcție de soluțiile nenegative ale ecuațiilor respective (indicate în paranteze). Comentați rezultatul obținut.

1) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$; 2) $2x^2-x-1=0$; 3) $x^2-3x-10=0$;

4) $-8x^2-3x+0{,}5=0$; 5) $x(x+\sqrt{15})=0$.

culege $\left(\frac{1}{8}\right)$	seamănă (1)	cine $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	vînt (5)	furtună (0)

19. Determinați zerourile funcției $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=3x-x^2$; b) $f(x)=-3x^2+x+2$; c) $f(x)=0,(4)x^2-1$; d) $f(x)=4{,}5x^2-2x-1$.

20. Aflați rădăcinile reale ale polinomului:

a) $P(X)=-2X^2+X+3$; b) $P(X)=0{,}1X^2-X-20$;

c) $P(X)=2X^4-X^2-1$; d) $P(X)=9X^4-X^2$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

21. Descompuneți în factori expresia: a) t^4+t^2-2; b) t^4-t^2-2.

22. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația: a) $x(x-1)(x-2)(x-3)=3$; b) $(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)=3$.

23. Folosind metoda substituției, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $5x^2+3|x|-9=0$; b) $2x^2-1=|x|(|x|-2)$.

24. Formulați exerciții asemănătoare cu exercițiile **15**, **17** și propuneți-le colegilor.

25*. Aflați valoarea parametrului real m, știind că ecuațiile $2x^2-3x+1=0$ și $3x^2+m(x+2)+1=0$ au o soluție comună.

26*. Știind că m este un parametru real, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:
a) $mx^2-3x-1=0$; b) $(m-2)x^2+x-4=0$; c) $x^2-mx+4=0$;
d) $x^2+(m-3)x-5=0$; e) $mx^2-x-m=0$; f) $x^2+mx+2m=0$.

27. Alcătuiți o problemă care conduce la rezolvarea ecuației:
a) $x^2-8x-12=0$; b) $3x^2-5=0$.

§ 3. Ecuații raționale

În ecuațiile a) $3x-5=2(1-x)$, b) $2x+\frac{3x}{x-1}=x+1$, c) $1-\frac{x-1}{x^2-4}=-\frac{2x}{x-2}$, membrul stîng și membrul drept sînt expresii raționale, adică expresii formate din numere și litere cu ajutorul operațiilor de adunare, scădere, înmulțire și împărțire. Astfel de ecuații sînt numite ***ecuații raționale***. În ecuațiile b), c) necunoscuta apare atît la numărătorul, cît și la numitorul raportului algebric respectiv. Atare ecuații se mai numesc ***ecuații raționale cu necunoscuta la numitor***.

APLICĂM

Ecuația rațională cu necunoscuta la numitor se rezolvă conform următorului *algoritm*:

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația
$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{3x}{x-1}-\frac{1}{x+1}.$$

Rezolvare:

① Se determină DVA al ecuației.

DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$.

② Se trec toți termenii în membrul stîng al ecuației.

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{3x}{x-1}-\frac{1}{x+1}\Leftrightarrow\frac{2}{x^2-1}-\frac{3x}{x-1}+\frac{1}{x+1}=0\Leftrightarrow$$

③ Se aduce membrul stîng la forma $\frac{A}{B}$.

$$\Leftrightarrow\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}=0.$$

④ Se aplică regula egalării cu zero a unui raport.

$3x^2+2x-1=0$ și $x^2-1\neq 0$.

⑤ Se rezolvă ecuația obținută ($A = 0$).

Ecuația $3x^2+2x-1=0$ are soluțiile $x_1=-1$, $x_2=\frac{1}{3}$.

⑥ Se verifică dacă valorile obținute satisfac condițiile precizate, inclusiv dacă aparțin DVA.

Deoarece $x_1=-1\notin$ DVA, această valoare nu poate fi soluție a ecuației date.

$x_2=\frac{1}{3}\in$ DVA.

⑦ Se scrie răspunsul.

Răspuns: $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Unele ecuații raționale cu necunoscuta la numitor, mai complicate, pot fi reduse la ecuații mai simple prin diverse transformări sau prin introducerea unei necunoscute auxiliare.

APLICĂM

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{2x^2}{x^2-2x+1}+\frac{3x}{x-1}-2=0.$

Rezolvare:

DVA: $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, deoarece $x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=1$ și ambele rapoarte din membrul stîng nu au sens pentru $x=1$.

$$\frac{2x^2}{x^2-2x+1}+\frac{3x}{x-1}-2=0 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{(x-1)^2}+\frac{3x}{x-1}-2=0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+3\left(\frac{x}{x-1}\right)-2=0.$$

Introducem necunoscuta auxiliară t. Fie $\frac{x}{x-1}=t$. Obținem ecuația $2t^2+3t-2=0$, cu soluțiile $t_1=-2,\ t_2=\frac{1}{2}$. (Verificați!) Revenind la necunoscuta x, obținem ecuațiile $\frac{x}{x-1}=-2$ și $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{2}$.

Prima ecuație are soluția $x_1=\frac{2}{3}$, iar a doua – soluția $x_2=-1$. (Verificați!)

Valorile $x_1=\frac{2}{3}$ și $x_2=-1$ aparțin DVA. Deci, ambele sînt soluții ale ecuației date.

Răspuns: $S=\left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Recunoașteți ecuațiile raționale cu necunoscuta la numitor:

a) $x-1=3$; b) $x^2-3x+4=0$; c) $\frac{t^2+1}{4}-\frac{t}{3}=\frac{1}{2}$;
d) $\frac{x}{x^2+2}-\frac{1}{x}=0$; e) $\frac{2}{t}-\frac{3}{t+1}=1$; f) $z^2-\frac{3}{z}-2=0$.

2. Precizați care dintre elementele mulțimii $\{-1, 0, 1, 5\}$ sînt soluții ale ecuației:

a) $\frac{x^2}{x-5}=\frac{2x-1}{x-5}$; b) $\frac{x(x+1)}{x^2-1}=\frac{x+1}{x^2-1}$; c) $\frac{3}{x}=x-2$; d) $\frac{t}{t^2-1}=\frac{t}{t+1}$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{1}{x}=2$; b) $-\frac{2}{x}=\frac{1}{3}$; c) $\frac{\sqrt{5}}{2x}=2{,}5$; d) $-\frac{3\sqrt{2}}{7x}=-\frac{1}{7}$.

4. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $\frac{2}{x-1}=\frac{3}{4}$; b) $-\frac{5}{3x-2}=\frac{1}{2}$; c) $\frac{2x}{1-x}=\frac{2}{5}$; d) $\frac{3x+2}{x+2}=-\frac{1}{2}$.

5. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

a) $\frac{2x-1}{x-1}=\frac{5x^2-1}{x-1}$; b) $\frac{x^2+2}{2+x}=\frac{2x-1}{x+2}$; c) $\frac{x(x-1)}{1-3x}=\frac{x^2+4x}{3x-1}$; d) $\frac{x^2}{x^2+5}=\frac{2x(x-3)}{x^2+5}$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{2}{2x-5}-\frac{5}{5-2x}=\frac{4}{7}$; b) $\frac{3}{x-3}=\frac{1}{x-3}-\frac{2}{3-x}$; c) $\frac{2x^2}{x^2-16}=\frac{3x}{x+4}$.

Formăm capacitățile și aplicăm

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{x}{x^2-6x+9}=\frac{5x}{x-3}$; b) $\frac{x-1}{x-2}=\frac{x}{1-x}$;

c) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x+3}{1-x^2}$; d) $\frac{x}{4x^2-4x+1}=-\frac{4x}{2x-1}$.

8. Completați, astfel încît ecuațiile să fie echivalente:

a) $\frac{x^2}{x-1}=\frac{2-3x}{1-x} \Leftrightarrow 2x^2-$ ▭ $x+4=0$;

b) $\frac{4}{x^2-4}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x}{x+2} \Leftrightarrow 5(x-$ ▭ $)(2x-$ ▭ $)=0$.

9. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $\frac{0{,}5}{x+3}=\frac{2}{4x+12}$; b) $\frac{1{,}2}{2x-1}=-\frac{6}{5-10x}$; c) $\frac{2x-1}{x^2-8x+16}=\frac{4x-2}{2(x-4)^2}$.

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{3}{x-5}-\frac{x}{x+1}=\frac{10}{(x+1)(x-5)}$; b) $\frac{16}{x-2}-\frac{6}{x}=\frac{21}{x+3}$;

c) $\frac{x^2+x}{x-1}+2x=\frac{3x-1}{x-1}+2$; d) $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x+4}{x(x+2)}=\frac{1}{x(x-2)}$.

11. Aflați valorile reale ale lui t pentru care:

a) suma rapoartelor algebrice $\frac{6t+18}{3t-1}$ și $\frac{4t-26}{2t+5}$ este egală cu 4;

b) diferența rapoartelor algebrice $\frac{3t+1}{1-2t}$ și $\frac{t-1}{t+1}$ este egală cu $\frac{1}{2}$;

c) suma rapoartelor algebrice $\frac{t+1}{t-5}$ și $\frac{10}{t+5}$ este egală cu produsul lor;

d) diferența rapoartelor algebrice $\frac{6}{2t-1}$ și $-\frac{2}{t-2}$ este egală cu produsul lor.

12. Stabiliți legitatea și determinați ecuația omisă:

a)

$\frac{x+3}{x-3}+\frac{x-3}{x+3}=3\frac{1}{3}$	$x^2-36=0$
$\frac{5x+7}{x-2}-\frac{2x+21}{x+2}=8\frac{2}{3}$	?

b)

$\frac{2(t-1)}{t+3}+\frac{t+3}{t-3}=5$	$\frac{x+6}{x-5}=0$
$\frac{4}{t+3}-\frac{5}{3-t}+1=\frac{1}{t-3}$	?

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(x^2-4)(2x+5)=0$; b) $\left(\frac{2+x}{x}-1\right)\cdot(6x-5)=0$; c) $(2x^2-3x+1)\cdot\left(\frac{x}{3x-1}+x\right)=0$;

d) $\left(\frac{2x}{x+2}+\frac{3}{x-2}+2\right)\cdot\left(x+1-\frac{3}{x+2}+8\right)=0$; e) $(5x^2-7x+8)\cdot\left(\frac{2x^2}{x-1}-\frac{5x}{x-1}+4\right)=0$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

14. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{7}{2x^2+4x}+\frac{1}{2x-4}=\frac{2}{4-x^2}$; b) $\frac{x^2+4}{x^2-4}+\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}=\frac{3x-2}{x^2-4}$;

c) $\frac{1}{t-8}+\frac{1}{t-6}+\frac{1}{t+6}+\frac{1}{t+8}=0$; d) $\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}=\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}$.

15. Știind că m este un parametru real, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $\frac{x-m}{m}=\frac{2m}{x-m}$;   b) $\frac{m}{x}+\frac{m-1}{x-1}=2$;

c) $\frac{x}{m}-2=\frac{m-1}{1-x}$;   d) $\left|x+\frac{1}{x}-3\right|=m-3$.

16. Aflați valorile cea mai mică și cea mai mare ale funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$ (D – domeniul de definiție):

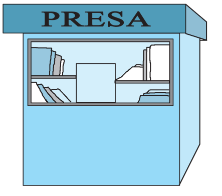
a) $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+1}$;   b) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2-2x+1}$.

§ 4. Sisteme de ecuații

4.1. Noțiunea de sistem de ecuații

1 Într-un chioșc erau 1305 ziare și reviste. După ce s-au vîndut 100 de ziare și 50 de reviste, ziare au rămas de două ori mai multe decît reviste.

Aflați cîte reviste și cîte ziare erau la început.



Rezolvare:

Fie x numărul inițial de ziare și y numărul inițial de reviste. Atunci, conform condiției problemei, obținem sistemul de ecuații cu două necunoscute

$$\begin{cases}x+y=1305,\\ x-100=2(y-50),\end{cases}$$ cu soluția (870, 435). (Verificați!)

Răspuns: Inițial, în chioșc erau 870 de ziare și 435 de reviste.

GENERALIZĂM

Fie ecuațiile $A_1(x,y)=B_1(x,y)$ și $A_2(x,y)=B_2(x,y)$. Dacă se pune problema să se afle soluțiile lor comune, adică perechile ordonate de numere reale $(a, b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ care satisfac ecuația întîi ***și*** ecuația a doua, atunci se spune că este dat ***un sistem de două ecuații cu două necunoscute***. El se notează: $\begin{cases}A_1(x,y)=B_1(x,y),\\ A_2(x,y)=B_2(x,y).\end{cases}$

Un sistem poate fi de trei ecuații cu trei necunoscute, de două ecuații cu trei necunoscute etc.

Definiție

Se numește **soluție a sistemului** de două ecuații cu două necunoscute perechea ordonată de numere $(a, b)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ care este soluție comună pentru ***toate*** ecuațiile acestuia.

A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a determina mulțimea soluțiilor lui.

Mulțimea soluțiilor unui sistem de ecuații (notată cu S) este ***intersecția*** mulțimilor soluțiilor ecuațiilor acestui sistem.

Relațiile dintre numărul de soluții și tipul sistemului de ecuații

Sistemul de ecuații

- $S=\varnothing$ → Sistemul este incompatibil.
- $S\neq\varnothing$
  - S este o mulțime finită. → Sistemul este compatibil determinat.
  - S este o mulțime infinită. → Sistemul este compatibil nedeterminat.

Rezolvarea sistemului de ecuații începe, de regulă, cu determinarea domeniului valorilor admisibile al acestuia.

Domeniul valorilor admisibile (DVA) al unui sistem de ecuații este ***intersecția*** domeniilor valorilor admisibile ale ecuațiilor sistemului.

Definiție

Două sisteme de ecuații de aceleași necunoscute se numesc **echivalente** dacă mulțimile de soluții ale acestora sînt egale.

Între sistemele de ecuații echivalente se scrie simbolul „$\Leftrightarrow$”.

Observație. Sistemele echivalente ce se rezolvă într-o mulțime (de regulă, în DVA al sistemului inițial) se numesc ***echivalente în această mulțime***.

Transformări care pot fi aplicate pentru a obține sisteme echivalente:

Exemple

1. Schimbînd ordinea ecuațiilor într-un sistem, obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases}3x-y=4\\x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=0,\\3x-y=4.\end{cases}$$

2. Înlocuind o ecuație a unui sistem prin altă ecuație, echivalentă cu cea inițială, obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases}3x-y=4\\4x+7y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-4,\\4x+7y=0.\end{cases}$$

3. Exprimînd într-o ecuație a unui sistem o necunoscută prin cealaltă necunoscută și substituind această expresie în celelalte ecuații ale sistemului, obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases}y=3x-4\\8x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=3x-4,\\8x+3x-4=0.\end{cases}$$

4. Înlocuind o ecuație a unui sistem cu altă ecuație, care se obține adunînd sau scăzînd două ecuații ale sistemului (înmulțite, dacă e cazul, cu un număr nenul), obținem un sistem echivalent cu cel dat:

$$\begin{cases}3x-y=4\\11x+y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-y=4,\\14x=4.\end{cases}$$

4.2. Metode de rezolvare a sistemelor de două ecuații cu două necunoscute

Sistemele de ecuații pot fi rezolvate prin:

♦ ***metoda substituției***

$$\begin{cases} x-3y=-4 \\ x-7y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3y-4, \\ 3y-4-7y=5. \end{cases}$$

⇦ Într-o ecuație a unui sistem o necunoscută se exprimă prin cealaltă necunoscută și expresia obținută se substituie în cealaltă ecuație a sistemului.

♦ ***metoda reducerii***

$$\begin{cases} 2x+0{,}5y=2 \mid \times 4 \\ 3x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=-1, \\ 11x=7. \end{cases}$$

⇦ Se adună (se scad) cele două ecuații ale unui sistem, astfel încît să se reducă una dintre necunoscute.

♦ ***metoda utilizării necunoscutelor (necunoscutei) auxiliare***

$$\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{y-1}=3, \\ 4x^2+\dfrac{3}{y-1}=-2. \end{cases}$$

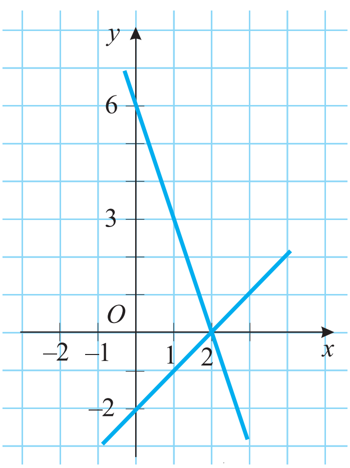
Fie $x^2=u$, $\dfrac{1}{y-1}=v$. Atunci

obținem sistemul $\begin{cases} u-v=3, \\ 4u+3v=-2. \end{cases}$

⇦ Se introduc necunoscute auxiliare, notînd unele expresii cu aceste necunoscute, pentru a obține un sistem mai simplu. Apoi se revine la necunoscutele inițiale.

♦ ***metoda grafică***

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 3x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x-2, \\ y=-3x+6. \end{cases}$$



$S=\{2\}$.

⇦ Se trasează, în același sistem de axe ortogonale, graficele ecuațiilor sistemului și se determină (dacă există) coordonatele punctelor de intersecție a acestora. Dacă graficele ecuațiilor sistemului nu se intersectează, rezultă că sistemul este incompatibil, adică $S=\varnothing$.

Observație. Metoda substituției, metoda reducerii, metoda utilizării necunoscutelor (necunoscutei) auxiliare sînt ***metode algebrice***, iar metoda grafică este ***metodă geometrică***.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Precizați care dintre perechile ordonate $(0,-2),\ (-1,1),\ (0,2),\ (-2,2),\ (0,3),\ (3,0),\ (-3,2)$ sînt soluții ale sistemului:

a) $\begin{cases}3x-y=-2,\\2x+3y=6;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+4y=3,\\x-y=-2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x=-2(x+y),\\5x+2y=-4.\end{cases}$

2. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda substituției, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}x-3y=0,\\5x-y=-1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-y=1,\\6x+2y=0;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+2y=3,\\0{,}2x-3{,}5y=4;\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{1}{3}x+y=2,\\\frac{2}{5}x-3y=10.\end{cases}$

3. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda reducerii, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}2x-3y=-2,\\3x+y=5;\end{cases}$ b) $\begin{cases}0{,}5y-3x=4{,}5,\\5x+2y=3;\end{cases}$ c) $\begin{cases}-2{,}2x+3y=2,\\3x-4y=-1;\end{cases}$ d) $\begin{cases}\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}y=\frac{1}{6},\\2x+2y=3.\end{cases}$

4. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda grafică, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}y=2x,\\x-2y=9;\end{cases}$ b) $\begin{cases}x+2y=3,\\y+2x=6;\end{cases}$ c) $\begin{cases}y-3x=0,\\2x-y=-6;\end{cases}$ d) $\begin{cases}x+y=-2,\\2x-y=4;\end{cases}$

e) $\begin{cases}y=3x+4,\\6x-2y=12;\end{cases}$ f) $\begin{cases}2x+y=0,\\y=2x+1;\end{cases}$ g) $\begin{cases}x+y=1,\\3y=3-3x;\end{cases}$ h) $\begin{cases}y-x=2,\\-4x=12-4(y+1).\end{cases}$

5. Completați cu un număr real, astfel încît sistemul să fie compatibil:
1) nedeterminat; 2) determinat.

a) $\begin{cases}2x-\square\, y=-4,\\10x-6y=-20;\end{cases}$ b) $\begin{cases}-x+2y=-3,\\\square\, x-6y=9;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x-y=-1,\\-12x+4y=\square.\end{cases}$

Formăm capacitățile și aplicăm

6. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}3(x-2)=y-5,\\4x-3(y+1)=0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}0{,}5x-3{,}4(5-y)=4{,}7,\\-4x+8y=12;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x^2-x=(x+1)^2+y,\\-5x-2y=1;\end{cases}$

d) $\begin{cases}u-2\left(v-4\frac{1}{3}\right)=2\frac{1}{4},\\\frac{3}{4}u+\frac{1}{2}v=2;\end{cases}$ e) $\begin{cases}3x-\sqrt{5}y=2\sqrt{5},\\7x-y=10;\end{cases}$ f) $\begin{cases}u+v=6(u-v),\\4,(5)u-0,(32)v=0.\end{cases}$

7. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda grafică şi cea algebrică, sistemul:

a) $\begin{cases}6-x=2y,\\2x+4y=0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}(x-2)^2=x^2+y,\\y+3x=6;\end{cases}$

c) $\begin{cases}x-3y=6,\\5(x-1)+6(y+2)=48;\end{cases}$ d) $\begin{cases}-x-3y=-7,\\x^2+y=(x-1)^2+2.\end{cases}$

8. Determinați legitatea şi aflați numărul omis:

$\begin{cases}6x-10y=11,\\5y+7x=19;\end{cases}$ $\boxed{2,82}$

$\begin{cases}2x-3y=14,\\7y+5x=10.\end{cases}$ $\boxed{?}$

Dezvoltăm capacitățile și creăm

9. Explicitînd modulele, rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}|x|+3|y|=5,\\ |x-2|+2|y-1|=0;\end{cases}$ b) $\begin{cases}3|x+3|+|y-4|=0,\\ |x-6|+2|y|=5;\end{cases}$

c) $\begin{cases}|a|+2|b|=-3,\\ |a^2-2|+|b-4|=0;\end{cases}$ d) $\begin{cases}2|z-3|-|y+1|=2,\\ |z|+|y|=-5.\end{cases}$

10. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, prin metoda utilizării necunoscutelor auxiliare, sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}\dfrac{2}{x}-\dfrac{3}{y}=4,\\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2};\end{cases}$ b) $\begin{cases}\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{5}{y-1}=-3,\\ \dfrac{2}{x-1}-\dfrac{1}{2(y-1)}=1;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x^2-\dfrac{1}{y-1}=3,\\ 4x^2+\dfrac{3}{y-1}=-2.\end{cases}$

11. Două motonave, după întîlnire, şi-au continuat drumul, una spre sud, iar cealaltă spre apus, şi peste 2 ore distanța dintre ele era de 60 km. Aflați viteza fiecărei motonave, dacă se ştie că viteza uneia dintre ele este cu 6 km/h mai mare decît a celeilalte.

12. Scrieți un sistem de două ecuații cu două necunoscute, avînd soluțiile:
a) (1, 5) şi (5, 1); b) (–1, 0) şi (1, 2); c) (1, 0) şi (3, 2); d) (–2, –1) şi (1, 1).

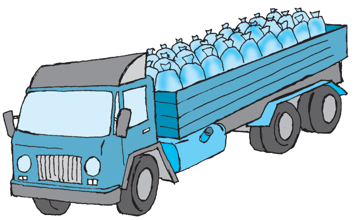
13. Unui luntraş, care plutea în amonte, i-a căzut pălăria în apă cînd trecea pe sub un pod. Peste o oră el a observat pierderea, a întors barca şi a ajuns pălăria la o distanță de 4 km de pod. Aflați viteza apei.

• *Problemă pentru campioni*

14. Pentru care valori ale parametrului real a sistemul $\begin{cases}2x-y=3\\ 10x-ay=15\end{cases}$ este compatibil nedeterminat?

§ 5. Rezolvarea problemelor cu ajutorul ecuațiilor și/sau sistemelor de ecuații

Diverse probleme din matematică, fizică, chimie, economie şi din alte domenii se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor, sistemelor de ecuații.



1 Într-un camion s-au încărcat 35 de saci cu făină şi cu zahăr. Sacii cîntăresc la un loc 2 t 500 kg. Un sac cu făină cîntăreşte 80 kg, iar un sac cu zahăr 50 kg.
Aflați cîți saci cu făină şi cîți cu zahăr s-au încărcat în camion.

Să rezolvăm această problemă cu ajutorul:

unei ecuații.

Fie x numărul de saci cu făină. Atunci $(35 - x)$ este numărul de saci cu zahăr. Deoarece un sac cu făină cîntăreşte 80 kg, s-au încărcat în total $80x$ kg de făină. Cum un sac cu zahăr cîntăreşte 50 kg, s-au încărcat în total $50(35 - x)$ kg de zahăr.

Conform condiției problemei, obținem ecuația

$$80x + 50(35 - x) = 2\,500,$$

cu soluția $x = 25$.

Aşadar, în camion au fost încărcați 25 de saci cu făină şi 10 saci cu zahăr.

unui sistem de ecuații.

Fie x numărul de saci cu făină, iar y – numărul de saci cu zahăr.

Ştiind că s-au încărcat în total 35 de saci, obținem prima ecuație: $x + y = 35$.

Deoarece un sac cu făină cîntăreşte 80 kg, iar un sac cu zahăr 50 kg şi s-au încărcat în total 2 t 500 kg, obținem a doua ecuație:

$80x + 50y = 2\,500 \Leftrightarrow 8x + 5y = 250.$

Conform condiției problemei, obținem sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = 35, \\ 8x + 5y = 250, \end{cases}$ cu soluția (25, 10).

Răspuns: În camion s-au încărcat 25 de saci cu făină şi 10 saci cu zahăr.

Concluzie. Uneori, o problemă poate fi rezolvată atît cu ajutorul unei ecuații, cît şi cu ajutorul unui sistem de ecuații.

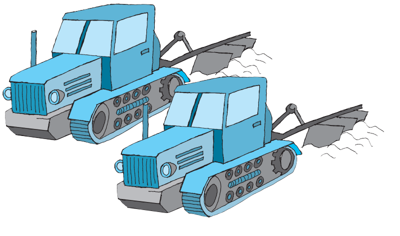
NE AMINTIM

Pentru a rezolva o problemă cu ajutorul ***ecuației*** (***sistemului de ecuații***), se procedează astfel:

① Se stabilesc datele cunoscute şi cele necunoscute ale problemei.
② Se notează fiecare mărime necunoscută aleasă cu o literă.
③ Se stabilesc relațiile dintre datele cunoscute şi cele necunoscute şi se scrie ecuația (sistemul de ecuații).
④ Se rezolvă ecuația (sistemul de ecuații).
⑤ Se analizează rezultatele, se alege soluția şi se scrie răspunsul.

APLICĂM

2 Un tractor ară un lot de pămînt. Peste 4 ore, i se alătură un alt tractor. Cele două tractoare termină de arat lotul în 8 ore.
Aflați în cîte ore ar putea ara lotul fiecare tractor, dacă se ştie că primului tractor i-ar trebui cu 8 ore mai mult decît tractorului al doilea.



Rezolvare:

Fie x numărul de ore în care primul tractor ar fi arat singur lotul de pămînt, atunci $(x - 8)$ este numărul de ore în care al doilea tractor ar fi arat singur acest lot. În aceste condiții, productivitatea muncii primului tractor este $\frac{1}{x}$ $\left(\frac{1}{x}\right.$ – partea din lot arată într-o oră), iar cea a tractorului al doilea este $\dfrac{1}{x-8}$. Știind că primul tractor a lucrat 12 ore (4 ore singur și 8 ore în comun), iar al doilea a lucrat 8 ore și ținînd cont de productivitatea muncii fiecărui tractor, obținem ecuația:

$$\frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}=1.$$

Să aflăm soluțiile ei.

DVA: $x\in\mathbb{R}\setminus\{0, 8\}$.

$$\frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}=1 \Leftrightarrow \frac{12}{x}+\frac{8}{x-8}-1=0 \Leftrightarrow \frac{12(x-8)+8x-x(x-8)}{x(x-8)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2+28x-96}{x(x-8)}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-28x+96}{x(x-8)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-28x+96=0, \\ x(x-8)\neq 0. \end{cases}$$

Soluțiile sistemului, deci și ale ecuației inițiale, sînt $x_1=24$, $x_2=4$. (Verificați!)

$x_2=4$ nu satisface condiția problemei. (Argumentați.)

Răspuns: Primul tractor va ara lotul de pămînt în 24 de ore, al doilea – în 16 ore.

Exercițiu. Rezolvați problema **2** cu ajutorul unui sistem de ecuații.

3 O soluție de alcool cu concentrația de 85% s-a amestecat cu o altă soluție și s-au obținut 10 *l* de soluție de alcool cu concentrația de 79%.

Aflați cîți litri de fiecare soluție s-au amestecat, dacă concentrația de alcool din soluția a doua este cu 66% mai mare decît volumul în litri al acestei soluții.

Rezolvare:

Fie x volumul în litri al primei soluții. Atunci $(10-x)$ *l* este volumul soluției a doua. Prima soluție conține $\dfrac{x\cdot 85}{100}$ litri de alcool, iar a doua are concentrația de alcool $(10-x+66)\%$.

Obținem ecuația $\dfrac{(10-x)(76-x)}{100}+\dfrac{85x}{100}=\dfrac{10\cdot 79}{100} \Leftrightarrow x^2-x-30=0$, cu soluțiile $x_2=-5$, $x_2=6$. (Verificați!) Constatăm că valoarea $x_2=-5$ nu satisface condiția problemei.

Răspuns: S-au amestecat 6 *l* de soluție de alcool cu concentrația de 85% cu 4 *l* de altă soluție.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

Rezolvați problemele 1–4 cu ajutorul ecuației.

1. Suma a două numere naturale este 12, iar produsul lor este 11. Aflați aceste numere.
2. Diferența a două numere întregi este 15, iar suma pătratelor lor este 725. Aflați aceste numere. Găsiți toate soluțiile.
3. Determinați lungimea și lățimea unui dreptunghi, știind că perimetrul lui este de 30 m, iar aria lui – de $44\ \text{m}^2$.
4. Una dintre laturile dreptunghiului este cu 3 cm mai mare decît cealaltă. Aflați lungimea laturilor dreptunghiului, dacă aria lui este de $1720\ \text{cm}^2$.

Rezolvați problemele 5–6:
a) cu ajutorul ecuației; **b) cu ajutorul sistemului de ecuații.**

5. Cu 6400 lei s-au cumpărat două bucăți de stofă de aceeaşi lungime, dar de calități diferite. 1 metru de stofă de calitatea întîi şi 1 metru de stofă de calitatea a doua costă în total 320 lei, iar 4 m de stofă de calitatea întîi costă cît 6 m de calitatea a doua. Determinați cît costă 1 metru de stofă de fiecare calitate şi cîți metri de stofă s-au cumpărat.

6. Distanța dintre două oraşe este de 280 km. Din aceste oraşe s-au pornit concomitent, unul spre celălalt, două trenuri: unul cu viteza de 80 km/h, celălalt cu viteza egală cu $\frac{3}{4}$ din viteza primului. Aflați cîți kilometri a parcurs fiecare tren pînă s-au întîlnit.

Formăm capacitățile și aplicăm

Rezolvați problemele 7–13 cu ajutorul ecuației.

7. Suma pătratelor cifrelor unui număr de două cifre este 52. Dacă din acest număr vom scădea 18, vom obține răsturnatul acestui număr. Aflați numărul.

8. Conform planului, o uzină trebuia să producă 360 de piese. În primele opt zile, uzina a depăşit planul zilnic cu 20%. În restul zilelor, uzina a depăşit planul zilnic cu 25%. În consecință, uzina a produs cu 82 de piese mai mult decît prevedea planul. În cîte zile uzina trebuia să realizeze planul?

9. Aria unui triunghi dreptunghic este de 24 cm^2. Dacă una dintre catetele lui se micşorează cu 1 cm, iar cealaltă se măreşte cu 3 cm, atunci se obține un triunghi cu aria de $27{,}5\text{ cm}^2$. Determinați lungimile catetelor triunghiului inițial.

10. Doi muncitori au executat împreună o lucrare în 12 ore. Dacă primul muncitor ar fi executat singur o jumătate din această lucrare, apoi al doilea muncitor – a doua jumătate, atunci toată lucrarea ar fi fost terminată în 25 de ore. Aflați în cîte ore ar executa lucrarea fiecare muncitor.

11. Un vapor parcurge distanța pe un rîu de la A la B în 3 ore, iar distanța de la B la A – în 4 ore. În cîte ore va parcurge distanța de la A la B o plută?

12. Suma a două numere este 8, iar suma inverselor acestor numere este 6. Aflați aceste numere.

13. Fie 736 ml de soluție de iod cu concentrația de 16%. Aflați cîți mililitri de alcool trebuie adăugați pentru a obține o soluție de iod cu concentrația de 10%.

Rezolvați problemele 14–15:
a) cu ajutorul ecuației; **b) cu ajutorul sistemului de ecuații.**

14. Suma a două numere este egală cu 122, iar raportul lor este $\frac{3}{7}$. Aflați numerele.

15. 50 de maiouri şi 75 de tricouri costă în total 4200 lei. După reducerea cu 10% a prețului maiourilor şi cu 20% a prețului tricourilor, pentru acestea s-ar plăti 3487,5 lei. Aflați prețul inițial al maiourilor şi al tricourilor.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

16. Cîte triunghiuri dreptunghice există, ştiind că lungimile laturilor lor sînt numere naturale, iar lungimea unei catete este de 15 cm?

17. Aflați două numere naturale, ştiind că diferența pătratelor lor este 45. Găsiți toate soluțiile.

18. Pentru a transporta 60 t de marfă, e necesar un număr de camioane. Din motiv că drumul era deteriorat, în fiecare camion s-au încărcat cu 0,5 t mai puțin decît se prevedea inițial şi, în consecință, au fost repartizate suplimentar 4 camioane. Determinați cîte camioane au fost planificate inițial.

19. Un agricultor are două feluri de îngrăşăminte chimice de azot: cu concentrația de 15% şi 21%. Aflați ce cantitate de îngrăşăminte de fiecare fel trebuie să amestece pentru a obține 1 tonă de îngrăşămînt de azot cu concentrația de 18%.

• ***Problemă pentru campioni***

20. Un cîine, fiind în punctul A, urmăreşte o vulpe, care este în avans cu 30 m față de el. Lungimea saltului cîinelui este de 2 m, iar al vulpii – de 1 m. La ce distanță de la punctul A cîinele va ajunge vulpea, dacă în timp ce cîinele face două salturi, vulpea face trei?

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $2x-3{,}5(x-4)=6$; b) $0{,}5(x-2)+2{,}3x=5x-4$;

c) $\frac{4}{5}(x+3)-\frac{2}{3}=\frac{5}{7}x+4$; d) $2{,}4(x-3)-4x=1-x$.

2. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ ecuația:

a) $5x^2-4x-1=0$; b) $-1{,}2x^2-7x=0$; c) $16x^2-1=0$;

d) $36x^2-12x+1=0$; e) $x^2-3x-4=0$; f) $3x^2+4=0$.

3. Folosind teorema lui Viète, rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $x^2-x-30=0$; b) $x^2+x-30=0$; c) $x^2-2x-120=0$;

d) $x^2-3x-180=0$; e) $x^2+5x-150=0$; f) $x^2+4x-32=0$.

4. Descompuneți în factori trinomul:

a) $3X^2-2X-1$; b) $-2X^2+5X+3$; c) $16X^2+8X+1$.

5. Rezolvați în $\mathbb{Q}$ ecuația:

a) $\frac{5x}{x-1}-\frac{2}{x+2}=3$; b) $\frac{2x-1}{x+1}-\frac{5x}{x-1}=-3$;

c) $4-\frac{2}{x^2-4}=\frac{3x}{x-2}$; d) $\frac{5x}{x^2-9}-3=\frac{1}{x+3}$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases}x-3y=4,\\5x-2y=-1;\end{cases}$ b) $\begin{cases}2y-3x=6,\\8y-2x=-3;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x+2y=1,\\\frac{1}{4}+\frac{2}{3}y=4;\end{cases}$

d) $\begin{cases}3x-y=-2,\\0{,}5(x-2)+y=8;\end{cases}$ e) $\begin{cases}x+y=3,\\4x-3y=-2;\end{cases}$ f) $\begin{cases}\sqrt{2}x-y=8,\\2\sqrt{2}x+3y=-9.\end{cases}$

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $(2x^2-5x)(7x+1)=0$; b) $\left(\frac{x}{1-x}-2\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$;

c) $(3x^2+2x-1)(x^2-16)=0$; d) $\left(\frac{4}{x^2-25}-\frac{1}{x-5}\right)(6x^2-x-1)=0$.

8. Într-un bloc sînt 64 de apartamente – cu 2 camere şi cu 4 camere. Ştiind că blocul are în total 160 de camere, aflaţi cîte apartamente sînt cu 2 camere şi cîte cu 4 camere.

9. Diferenţa a două numere este egală cu 84, iar raportul lor este $\frac{2}{5}$. Aflaţi numerele.

10. S-au amestecat 6 kg de bomboane de 33 lei kilogramul cu 12 kg de bomboane de 30 lei kilogramul. Determinaţi cît costă 1 kg de bomboane asortate.

Formăm capacităţile şi aplicăm

11. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia:

a) $\frac{3x^2}{x^2-2x+1}-\frac{5x}{x-1}+2=0;$ b) $-\frac{5t^2}{(t+2)^2}+\frac{t}{t+2}+4=0;$

c) $z^4+4z^2-5=0;$ d) $4x^2+5x+1=0;$

e) $\frac{2x}{x^2-16}-\frac{3}{x+4}=\frac{5-x}{x-4};$ f) $\frac{3}{2x-1}-\frac{4x}{x+2}=5.$

12. Fără a rezolva ecuaţia, determinaţi semnele soluţiilor ei:

a) $x^2-8x+3=0;$ b) $x^2+12x+8=0;$ c) $x^2-14x-\sqrt{7}=0;$

d) $6x^2-17x-23=0;$ e) $2t^2-19t+1=0;$ f) $x^2+\sqrt{5}x+18=0.$

13. Fără a rezolva ecuaţia $x^2-8x+12=0$, aflaţi:

a) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2};$ b) $x_1^2+x_2^2;$ c) $x_1^3+x_2^3;$ d) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1},$

unde x_1, x_2 sînt soluţiile ecuaţiei date.

14. Descompuneţi în factori expresia:

a) $x^{12}-2x^6+1;$ b) $(2x-1)^4-3(2x-1)^2+2;$

c) $3(2-x)^4-2(x-2)^2-1;$ d) $t^4-4t^2+4.$

15. Fie x_1 şi x_2 soluţiile ecuaţiei $x^2-8x+6=0$. Scrieţi o ecuaţie de gradul II cu soluţiile:

a) $t_1=2x_1$ şi $t_2=2x_2;$ b) $t_1=\frac{x_1}{x_2}$ şi $t_2=\frac{x_2}{x_1}.$

16. Rezolvaţi în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases}3(x-1)+4=5y,\\ x-8(y+0{,}5)=2;\end{cases}$ b) $\begin{cases}-(x+y)+4y=3,\\ 5x-4(0{,}2-y)=-2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}x^2-4(y+2)=(x-5)^2,\\ 3x-y=0.\end{cases}$

17. Rezolvaţi, prin metoda grafică, sistemul de ecuaţii:

a) $\begin{cases}2x+5y=0,\\ x-y=-7;\end{cases}$ b) $\begin{cases}\frac{1}{2}y=x+1,\\ y-2x=-2;\end{cases}$ c) $\begin{cases}3x-y=8,\\ 3(x-1)=2+y.\end{cases}$

18. Pe o distanţă de 210 km, un tren a mers la început cu viteza de 60 km/h, apoi, din cauza drumului deteriorat, şi-a micşorat viteza pînă la 20 km/h. Toată distanţa a fost parcursă în 6 ore. Aflaţi lungimea drumului deteriorat.

19. Se amestecă 2 *l* de soluţie de apă cu sare avînd concentraţia de 20% cu 8 *l* de soluţie de apă cu sare avînd concentraţia de 30%. Determinaţi concentraţia amestecului.

20. Suma pătratelor a două numere este 36. Împărţind cele două numere, se obţine cîtul 5 şi restul 3. Aflaţi numerele. Găsiţi toate soluţiile.

21. Stabiliți legitatea și determinați ecuația omisă:

$\begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=11 \end{cases}$	$\boxed{t^2-4t-5=0.}$
$\begin{cases} 2x-y=-3 \\ 3x+2y=5 \end{cases}$	$\boxed{?}$

22. Stabiliți legitatea și aflați numărul omis:

$\begin{cases} x+y=5 \\ x^2-y^2=15 \end{cases}$	$\boxed{17}$
$\begin{cases} x-y=-3 \\ x^2-y^2=21 \end{cases}$	$\boxed{?}$

23. Aflați zerourile funcției $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

a) $f(x)=-3x^2-x-4$; b) $f(x)=-3x^2+x+4$; c) $f(x)=x^4-x^2-20$.

24. Doi cicliști au pornit concomitent din localitățile A și B unul spre celălalt. Peste 1 oră, ei s-au întîlnit și, fără să se oprească, și-au continuat drumul. Ciclistul care a pornit din A a ajuns în B cu 95 de minute mai devreme decît celălalt a ajuns în A. Determinați vitezele cicliștilor, dacă distanța dintre A și B este de 28 km.

25. Doi turiști au pornit concomitent din localitățile A și B unul spre celălalt. Fiecare se deplasa cu o viteză constantă și, ajungînd în punctul respectiv, s-a întors imediat înapoi. Cînd s-au reîntîlnit, s-a constatat că un turist a parcurs cu 4 km mai mult decît celălalt și a ajuns în A peste 1 oră după reîntîlnire. Celălalt turist a ajuns în B peste 2 ore 30 de minute după reîntîlnire. Care este viteza fiecărui turist?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

24. Determinați semnele soluțiilor ecuației de gradul II în funcție de valorile parametrului real m:

a) $x^2-3x+m-1=0$; b) $x^2+(m+2)x-m+1=0$;

c) $2x^2-mx+3(m+1)=0$; d) $-3x^2-(m-1)x+4m=0$.

25. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația:

a) $|2x^2-x-2|=1$; b) $|x^2+x-2|=1-x$; c) $|-x^2+5x-6|=x^2$.

26. Rezolvați în $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ sistemul de ecuații:

a) $\begin{cases} (x-3y)^2=16, \\ x^2-y^2=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 5|x|-3|y+2|=-4, \\ 4x^2-4|y+2|=5; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x+y+xy=8, \\ x^2+y^2+xy=10; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x-y=5, \\ x^2+y^2=3xy-1. \end{cases}$

27. Mama, tatăl și fiul au împreună 84 de ani. Fiul împreună cu mama au 45 de ani, iar fiul împreună cu tatăl au 52 de ani. Aflați vîrsta fiecăruia.

28. Compuneți o problemă care să se rezolve cu ajutorul:

a) ecuației $2x^2-3x-5=0$; b) sistemului de ecuații $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3x-y=2. \end{cases}$

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta I

1. Fie ecuația $3t^2 - \square\, t + 4 = 0$.

a) Completați cu un număr real, astfel încît mulțimea soluțiilor ecuației să conțină două elemente. **2 p**

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația obținută în a). **4 p**

c) Scrieți polinomul de gradul doi ale cărui rădăcini sînt opusele soluțiilor obținute în b). **3 p**

2. Rezolvați problema cu ajutorul sistemului de ecuații:
Raportul dintre numărul de băieți și numărul de fete din clasa a IX-a este $\frac{3}{5}$.

a) Aflați cîte fete sînt în clasă, dacă se știe că băieți sînt cu 6 mai puțini decît fete. **5 p**

b) Aflați cîți elevi învață în clasa a IX-a. **2 p**

3. Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile a și b pentru care punctele $A(1, 4)$ și $B(-2, 8)$ aparțin graficului funcției f. **5 p**

b) Rezolvați pentru $a = 2$ și $b = 3$ în $\mathbb{N}$ ecuația $\frac{f(x)}{x-1} + x = 5$. **5 p**

Varianta II

1. Fie ecuația $2z^2 + \square\, z - 5 = 0$.

a) Completați cu un număr real, astfel încît mulțimea soluțiilor ecuației să conțină două elemente.

b) Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația obținută în a).

c) Scrieți polinomul de gradul doi ale cărui rădăcini sînt opusele soluțiilor obținute în b).

2. Rezolvați problema cu ajutorul sistemului de ecuații:
Raportul dintre numărul de manuale și numărul de cărți de literatură artistică din biblioteca școlii este $\frac{2}{3}$.

a) Aflați cîte manuale sînt în bibliotecă, dacă se știe că manuale sînt cu 350 mai puține decît cărți de literatură artistică.

b) Aflați cîte cărți sînt în total în biblioteca școlii.

3. Fie funcția $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = mx + n$, $m, n \in \mathbb{R}$.

a) Determinați valorile m și n pentru care punctele $A(-2, 1)$ și $B(3, 11)$ aparțin graficului funcției g.

b) Rezolvați pentru $m = 3$ și $n = -1$ în $\mathbb{N}$ ecuația $\frac{x^2 + 7}{g(x)} - x = 3$.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	26–24	23–22	21–20	19–16	15–12	11–8	7–6	5–4	3–2	1–0

Capitolul
5 Inecuații. Sisteme de inecuații

§ 1. Inecuații și sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută. Recapitulare și completări

1.1. Noțiunea de inecuație cu o necunoscută

1 Două firme confecționează carnete de elevi la comandă. Firma „BMR” cere 200 lei pentru comandă şi cîte 10 lei pentru fiecare carnet, iar firma „CAR” cere 50 lei pentru comandă şi cîte 15 lei pentru fiecare carnet.

Aflați numărul minim de carnete care face mai avantajoasă oferta firmei „BMR”.

Rezolvare:

Fie x numărul de carnete care trebuie confecționate. Conform condiției problemei, firma „BMR” va executa comanda pentru $(200+10x)$ lei, iar firma „CAR” – pentru $(50+15x)$ lei.

Pentru a răspunde la întrebarea problemei, trebuie să rezolvăm în mulțimea $\mathbb{N}$ inecuația $200+10x<50+15x$ și să determinăm din mulțimea soluțiilor ei soluția cea mai mică.

Inecuația $200+10x<50+15x$ este un exemplu de inecuație cu o necunoscută.

Definiție

Numărul a se numeşte **soluție** a inecuației cu o necunoscută, dacă el transformă inecuația într-o inegalitate adevărată.

A rezolva o inecuație înseamnă a determina mulțimea soluțiilor ei.

Mulțimea soluțiilor inecuației se notează cu S.

Două inecuații cu o necunoscută se numesc ***echivalente*** dacă mulțimile soluțiilor lor sînt egale.

Între două inecuații echivalente se scrie simbolul „ $\Leftrightarrow$ ”.

Aplicînd următoarele relații de echivalență, bazate pe proprietăți ale relației de inegalitate a numerelor reale, obținem inecuații echivalente:

		Exemple
1. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(x) < f(x)$	– dacă permutăm membrii unei inecuații, se obține o inecuație de sens opus, echivalentă cu prima:	$x+3 > 2x \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x < x+3$
2. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x)+a > g(x)+a$	– dacă la ambii membri ai unei inecuații adunăm același număr real, se obține o inecuație de același sens, echivalentă cu cea inițială:	$2x+5 > 7 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 2x > 7-5$
3. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow af(x) > ag(x)$ pentru orice $a \in \mathbb{R},\ a > 0$	– dacă înmulțim (împărțim) ambii membri ai unei inecuații cu (la) același număr real pozitiv, se obține o inecuație de același sens, echivalentă cu cea inițială:	$3x > 27 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > 27:3$
4. $f(x) > g(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow af(x) < ag(x)$ pentru orice $a \in \mathbb{R},\ a < 0$	– dacă înmulțim (împărțim) ambii membri ai unei inecuații cu (la) același număr real negativ, se obține o inecuație de sens opus, echivalentă cu cea inițială:	$-3x < 81 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x > 81:(-3)$

1.2. Intervale de numere reale

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ și $a < b$.

Mulțimea	Intervalul de numere reale	
	Se notează	Reprezentarea pe axă
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x \le b\}$	$[a, b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a \le x < b\}$	$[a, b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x \le b\}$	$(a, b]$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$	(a, b)	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > a\}$	$(a, +\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \ge a\}$	$[a, +\infty)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x < b\}$	$(-\infty, b)$	
$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \le b\}$	$(-\infty, b]$	
$\mathbb{R}$	$(-\infty, +\infty)$	

1.3. Inecuații de forma $ax+b\geq 0$ $(\leq,\ >,\ <)$, $a,\ b\in\mathbb{R}$

Fie $a,\ b\in\mathbb{R}$. Inecuația $ax+b\geq 0$ cu necunoscuta $x\in\mathbb{R}$ poate fi rezolvată astfel:

$$ax+b\geq 0 \Leftrightarrow ax\geq -b.$$

Să examinăm cazurile $a\neq 0$ și $a=0$.

1) Cazul $a\neq 0$

a) Dacă $a>0$, atunci $ax\geq -b \Leftrightarrow x\geq -\frac{b}{a}$. Deci, $S=\left[-\frac{b}{a},\ +\infty\right)$.

b) Dacă $a<0$, atunci $ax\geq -b \Leftrightarrow x\leq -\frac{b}{a}$. Deci, $S=\left(-\infty,\ -\frac{b}{a}\right]$.

2) Cazul $a=0$

a) Dacă $a=0$ și $b>0$, atunci $S=\mathbb{R}$.

b) Dacă $a=0$ și $b=0$, atunci $S=\mathbb{R}$.

c) Dacă $a=0$ și $b<0$, atunci $S=\varnothing$.

Exercițiu. Rezolvați în mod analog inecuațiile de forma $ax+b\leq 0$ $(>,\ <)$, $a,\ b\in\mathbb{R}$.

Definiție

Inecuațiile de forma $ax+b<0,\ ax+b>0,\ ax+b\leq 0,\ ax+b\geq 0,\ a,\ b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$, se numesc **inecuații de gradul I cu o necunoscută**.

Să rezolvăm inecuația problemei 1:

$$200+10x<50+15x \Leftrightarrow 15x-10x>200-50 \Leftrightarrow 5x>150 \Leftrightarrow x>30.$$

Răspuns: Numărul minim de carnete care face mai avantajoasă oferta firmei „BMR” este 31.

Exercițiu. Precizați proprietățile inegalităților numerelor reale, folosite la rezolvarea acestei inecuații.

APLICĂM

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

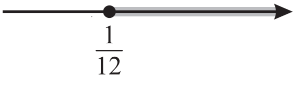
a) $x-5\leq 15x-2(x+3)$; b) $\frac{12x-1}{3}<4x+3$; c) $\frac{2-3x}{3}>\frac{5-2x}{2}$;

d) $|2x-1|<3$; e) $|x-4|\geq 1$.

Rezolvare:

a) $x-5\leq 15x-2(x+3) \Leftrightarrow x-5\leq 15x-2x-6 \Leftrightarrow x-15x+2x\leq -6+5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -12x\leq -1 \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{12}$. Deci,



Răspuns: $S=\left[\frac{1}{12},\ +\infty\right)$.

b) $\frac{12x-1}{3}<4x+3 \Leftrightarrow 12x-1<12x+9 \Leftrightarrow 12x-12x<9+1 \Leftrightarrow 0\cdot x<10$.

Răspuns: $S=\mathbb{R}$.

c) $\frac{2-3x}{3} > \frac{5-2x}{2} \Leftrightarrow 4-6x > 15-6x \Leftrightarrow 6x-6x > 15-4 \Leftrightarrow 0 \cdot x > 11.$

Inecuația nu are soluții.

Răspuns: $S = \varnothing$.

d) $|2x-1| \le 3 \Leftrightarrow -3 \le 2x-1 \le 3 \Leftrightarrow -2 \le 2x \le 4 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2.$

Răspuns: $S = [-1, 2]$.

e) $|x-4| > 1 \Leftrightarrow x-4 > 1$ sau $x-4 < -1 \Leftrightarrow x > 5$ sau $x < 3$.

Răspuns: $S = (-\infty, 3) \cup (5, +\infty)$.

Observație. Inecuațiile de gradul I pot fi rezolvate studiindu-se semnul funcției respective.

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $2x+8<0$.

Rezolvare:

Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+8$.

Aflăm zeroul funcției f: $2x+8=0 \Leftrightarrow x=-4$.

Tabelul de variație a semnului funcției f este:

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$

Deci, $f(x) < 0$ pentru $x \in (-\infty, -4)$ (fig. 1)

Răspuns: $S = (-\infty, -4)$.

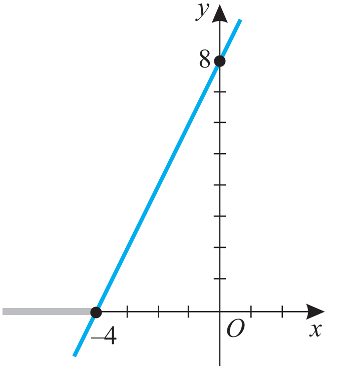


Fig. 1

1.4. Sisteme de inecuații de gradul I cu o necunoscută

2 Pentru a prepara la cantina școlii 20 de porții de felul întîi, sînt necesare 0,5 kg de carne și 1 kg de orez, iar pentru a prepara o porție de felul doi, este nevoie de 0,1 kg de carne și 0,15 kg de orez. Pentru cîți elevi a fost pregătită masa, dacă se știe că s-au folosit mai mult de 11 kg de carne și mai puțin de 18 kg de orez?

Rezolvare:

Fie x numărul de elevi pentru care au fost pregătite bucatele. Atunci s-au folosit $\left(\frac{0{,}5x}{20}+0{,}1x\right)$ kg de carne și $\left(\frac{x}{20}+0{,}15x\right)$ kg de orez. Conform condiției problemei, obținem inecuațiile $\frac{0{,}5x}{20}+0{,}1x>11$ și $\frac{x}{20}+0{,}15x<18$. Astfel, se cere să se afle în mulțimea $\mathbb{N}$ soluțiile comune ale inecuației întîi ***și*** ale inecuației a doua. În acest caz, se spune că trebuie să rezolvăm un sistem de două inecuații de gradul I cu o necunoscută:

$$\begin{cases} \frac{0{,}5x}{20}+0{,}1x>11 \\ \frac{x}{20}+0{,}15x<18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4x>440 \\ x+3x<360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x>440 \\ 4x<360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>88, \\ x<90. \end{cases}$$

În mulțimea $\mathbb{N}$ acest sistem de inecuații are soluția unică 89.

Răspuns: Au fost pregătite bucate pentru 89 de elevi.

În caz general, ***un sistem de două inecuații de gradul I cu o necunoscută*** se notează:

$$\begin{cases} a_1x+b_1 \ge 0, \ a_1 \in \mathbb{R}^*, \ b_1 \in \mathbb{R}, \\ a_2x+b_2 \ge 0, \ a_2 \in \mathbb{R}^*, \ b_2 \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Definiție

Se numeşte **soluție** a unui sistem de inecuații de gradul I cu o necunoscută orice valoare a necunoscutei care transformă ***fiecare*** inecuație a sistemului într-o inegalitate adevărată.

Observații. **1.** Un sistem de inecuații poate fi format din inecuații cu oricare dintre semnele „ $<$ ”, „ $\le$ ”, „ $>$ ”, „ $\ge$ ”.
2. Există sisteme de două, de trei sau de mai multe inecuații.

A rezolva un sistem de inecuații înseamnă a determina mulțimea soluțiilor lui.

Mulțimea soluțiilor unui sistem de inecuații (notată cu S) este ***intersecția*** mulțimilor soluțiilor inecuațiilor acestui sistem.

Definiție

Două sisteme de inecuații se numesc **echivalente** dacă mulțimile soluțiilor lor sînt egale.

Între sistemele de inecuații echivalente se scrie simbolul „ $\Leftrightarrow$ ”.

Observație. Sistemele echivalente de inecuații ce se rezolvă pe o mulțime se numesc ***echivalente în această mulțime***.

APLICĂM

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații $\begin{cases} 3(x-1) \le 2(x+2), \\ 2x-1 > 5. \end{cases}$

Rezolvare:

$$\begin{cases} 3(x-1) \le 2(x+2) \\ 2x-1>5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-3 \le 2x+4 \\ 2x>6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 7, \\ x>3. \end{cases}$$

$x \in (3, 7]$

Răspuns: $S=(3, 7]$.

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația dublă $-2<2x+1<5$.

Rezolvare:

Inecuația poate fi scrisă sub formă de sistem de inecuații:

$$-2<2x+1<5 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1>-2 \\ 2x+1<5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x>-3 \\ 2x<4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1{,}5, \\ x<2. \end{cases}$$

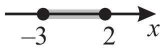
$x \in (-1{,}5; 2)$

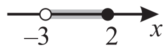
Răspuns: $S=(-1{,}5; 2)$.

Exerciții și probleme

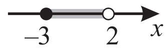
Fixăm cunoștințele

1. Precizați care desen este reprezentarea pe axă a intervalului $(-3, 2]$:

a) 

b) 

c) 

d) 

2. Reprezentați pe axa numerelor și scrieți sub formă de interval de numere reale mulțimea soluțiilor inecuației:

a) $-3 \le x < -2$; b) $6{,}5 \le x \le 11{,}5$; c) $2 < x < 4$; d) $x > -2$; e) $x \le 6$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $7x - 5{,}3 < 8{,}7$; b) $1 - 3x > 7$; c) $30 + 5x \le 18 - 7x$;

d) $5(x-1) + 7 \ge 1 - 3(x+2)$; e) $x - \dfrac{2x+3}{2} \le \dfrac{x-1}{4}$.

4. Rezolvați în $\mathbb{N}$ inecuația:

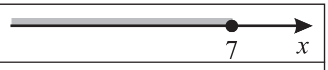
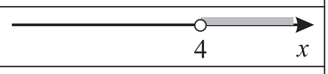
a) $5{,}6(x-3) - 3{,}2(2-x) < 20{,}8$; b) $4{,}8(x-4) - 3{,}7(2-x) < 24{,}4$.

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} 2x+1 > 0, \\ x-3 < 0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 1-x \le 0, \\ 3x+2 < 0; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x-0{,}5 \ge 0, \\ 2x-5 \ge 0; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 1{,}2x-6 \le 0, \\ 4x-3 \le 0. \end{cases}$

6. Completați tabelul folosind modelul din linia 1:

1	x mai mic sau egal cu șapte	$x \le 7$	$(-\infty, 7]$	
2	x mai mare sau egal cu doi			
3		$-3 < x < 5$		
4	x mai mic decît 5,4			
5				
6			$(-\sqrt{3}, +\infty)$	

Formăm capacitățile și aplicăm

7. Aflați ce costă mai mult: 7 pixuri sau 10 blocnotesuri, dacă se știe că 2 pixuri costă mai mult decît 3 blocnotesuri.

8. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $(x-3)(x+2) - (x-3)^2 > 15x - 10$; b) $(x+2)^2 - (x+2)(x-5) < 14x - 7$;

c) $5(x-2) - 3 \le \dfrac{9(x-2)}{2} - 3(2x-4)$; d) $\dfrac{3}{2x-1} > 0$; e) $\dfrac{-2}{4x-12} \le 0$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} 17x-2>12x-1, \\ 3-9x<1-x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-5\le 15-3x, \\ 1-4x>22-3x; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4-x\ge \dfrac{x-1}{3}, \\ \dfrac{7x-1}{8}\ge 6; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 5(x+1)\ge 3(x+3)+1, \\ 2(2x-1)<7(x+1). \end{cases}$

10. Determinați domeniul de definiție al funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{24x-48}$; b) $f(x)=\dfrac{3}{\sqrt{4-5x}}$; c) $f(x)=\sqrt{10-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-6}}$.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația dublă:

a) $-5<3-2x<1$; b) $1<3x-2<7$;

c) $-2\le 4-3x\le 10$; d) $3x-2<4x+1<3x+5$.

12. Pe un raft sînt cu 5 cărți mai multe decît pe altul. Se știe că pe raftul al doilea sînt mai puțin de 11 cărți, iar pe ambele rafturi sînt nu mai puțin de 25 de cărți. Cîte cărți sînt pe ambele rafturi?

13. Segmentele de lungimi 5, 8 și x sînt laturile unui triunghi. Aflați valorile posibile ale necunoscutei x.

14. Un autobuz a făcut într-o zi 8 curse și a transportat mai mult de 187 de pasageri, astfel încît toate locurile au fost ocupate și numai într-o cursă doi pasageri au călătorit în picioare. În ziua următoare, același autobuz a făcut 15 curse și a transportat mai puțin de 367 de pasageri. În total, în această zi, numai trei locuri n-au fost ocupate. Aflați cîte locuri are autobuzul.

15. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$3x-1\ge 5(x+2)-3$	-4
$2(x+3)\ge 6x+4{,}5$	?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

16. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:

a) $|3x+2|>1$; b) $|6-9x|\ge 18$; c) $|3x+7|<5$.

17. Aflați valorile parametrului real a pentru care sistemul de inecuații are cel puțin o soluție reală:

a) $\begin{cases} x<2, \\ x>a; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\le 3, \\ x>a; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\le -3, \\ x\ge a; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\ge 5, \\ x\le a. \end{cases}$

18. Determinați valorile parametrului real a, astfel încît sistemul de inecuații să nu aibă soluții:

a) $\begin{cases} x<3, \\ x>a; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\le 2, \\ x>a; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x\le 5, \\ x\ge a; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\ge -2, \\ x\le a. \end{cases}$

19. Aflați valorile parametrului real a pentru care sistemul de inecuații

$\begin{cases} 2(a-3x)<1-x \\ 5-x>3+3(x-a) \end{cases}$ are în $\mathbb{R}$ cel puțin o soluție reală.

20. Determinați valorile parametrului real a, astfel încît inecuația dublă $-5\le x\le a$ să aibă mulțimea soluțiilor: a) $S=\{-5\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=[-5;a]$.

§ 2. Inecuații de gradul II cu o necunoscută. Metoda intervalelor

2.1. Inecuații de gradul II cu o necunoscută

Atelier. **1.** Trasați în diferite sisteme de coordonate graficele funcțiilor:

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=x^2-4x+3;$$
$$g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad g(x)=x^2+4x+4;$$
$$h\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad h(x)=-x^2+2x-5.$$

2. Aflați semnele fiecărei funcții f, g, h.

3. Comparați și comentați rezultatele.

INVESTIGĂM

Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x^2-x-6>0$.

Rezolvare:

Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-x-6$.

Aflăm zerourile funcției f:

$$x^2-x-6=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ sau } x=3.$$

Reprezentăm schematic graficul funcției f (parabola) într-un sistem de axe ortogonale (fig. 2).

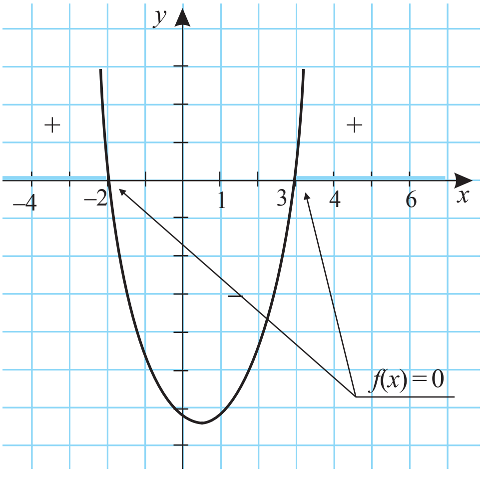


Fig. 2

Folosind graficul, determinăm valorile lui x pentru care $f(x)>0$. Obținem $x<-2$ sau $x>3$.

Răspuns: $S=(-\infty,\ -2)\cup(3,\ +\infty)$.

Definiție

Inecuațiile de forma $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\geq 0$, $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, $a, b, c\in \mathbb{R}$, $a\neq 0$, se numesc **inecuații de gradul II cu o necunoscută**.

Numărul m este **o soluție** a unei inecuații cu o necunoscută, dacă prin substituirea necunoscutei cu m în această inecuație se obține o propoziție adevărată.

Inecuații echivalente se obțin aplicînd proprietăți ale inegalităților numerelor reale.

Algoritmul de rezolvare a inecuației de gradul II

① Prin transformări echivalente, reprezentăm inecuația sub forma

$$ax^2+bx+c>0\ (ax^2+bx+c<0,\ ax^2+bx+c\geq 0,\ ax^2+bx+c\leq 0),\ a\neq 0.$$

② Examinăm funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=ax^2+bx+c,\ a\neq 0.$

③ Aflăm zerourile funcției f prin rezolvarea ecuației $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0.$

④ Trasăm schematic graficul funcției f.

⑤ Determinăm valorile lui x pentru care $f(x)>0\ (f(x)<0,\ f(x)\geq 0,\ f(x)\leq 0).$

⑥ Scriem răspunsul sub formă de interval numeric.

APLICĂM

• Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $-4x^2+4x-1\geq 0.$

Rezolvare:

Cercetăm funcția

$$f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=-4x^2+4x-1.$$

Aflăm zerourile funcției f:

$$-4x^2+4x-1=0 \Leftrightarrow (2x-1)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}.$$

Reprezentăm într-un sistem de axe ortogonale graficul funcției f (fig. 3). Cu ajutorul acestui grafic, stabilim că $f(x)\geq 0$ numai pentru $x=\frac{1}{2}$.

Răspuns: $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

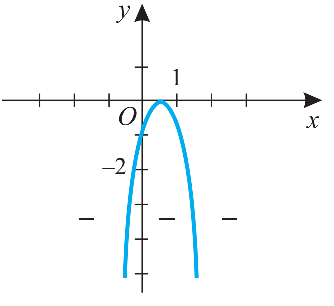
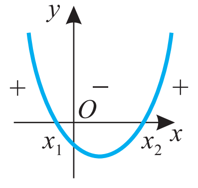
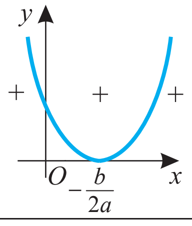
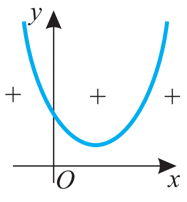
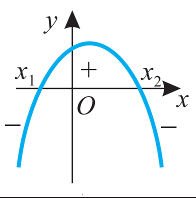
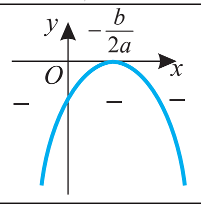
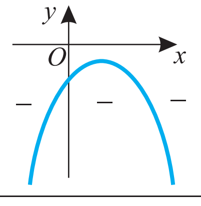


Fig. 3

Acest mod de rezolvare a inecuațiilor de gradul II cu o necunoscută se bazează pe proprietăți ale funcției de gradul II.

Studiul inecuațiilor $ax^2+bx+c>0$, $a\neq 0$, și $ax^2+bx+c\geq 0$, $a\neq 0$

Valorile lui		Semnele funcției $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$	Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2+bx+c>0$, $a\neq 0$	Mulțimea soluțiilor inecuației $ax^2+bx+c\geq 0$, $a\neq 0$
a	Δ			
$a>0$	$\Delta>0$		$S=(-\infty,\ x_1)\cup(x_2,\ +\infty)$	$S=(-\infty,\ x_1]\cup[x_2,\ +\infty)$
	$\Delta=0$		$S=\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{2a},\ +\infty\right)$	$S=\mathbb{R}$
	$\Delta<0$		$S=\mathbb{R}$	$S=\mathbb{R}$
$a<0$	$\Delta>0$		$S=(x_1,\ x_2)$	$S=[x_1,\ x_2]$
	$\Delta=0$		$S=\varnothing$	$S=-\dfrac{b}{2a}$
	$\Delta<0$		$S=\varnothing$	$S=\varnothing$

Observație. Inecuațiile de forma $ax^2+bx+c<0$, $ax^2+bx+c\leq 0$, $a\neq 0$, se reduc, prin înmulțirea coeficienților lor cu -1, la inecuații de forma celor prezentate în tabel.

2.2. Metoda intervalelor

INVESTIGĂM

Rezolvați în ℝ inecuația $x^2-2x-15<0$.

Rezolvare:

Descompunem în factori membrul stîng al inecuației: $x^2-2x-15=(x-5)(x+3)$. Fie funcțiile $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-5$, și $g\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=x+3$. Alcătuim tabelul de variație a semnelor funcțiilor f și g:

x	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$f(x)$	–	–	–	0	+
$g(x)$	–	0	+	+	+
$f(x)\cdot g(x)$	+	0	–	0	+

Din tabel rezultă că pe fiecare dintre intervalele $(-\infty, -3)$, $(-3, 5)$ și $(5, +\infty)$ funcția $f\cdot g$ își păstrează semnul. Se spune că funcția $f\cdot g$, trecînd prin punctele –3 și 5, își schimbă semnul, și anume:

Astfel, am obținut că $x^2-2x-15<0$ pentru $x\in(-3, 5)$.

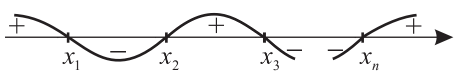
Răspuns: $S=(-3, 5)$.

GENERALIZĂM

Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, unde $x_1, x_2, \dots, x_n$ sînt numere reale distincte.

Zerourile $x_1, x_2, \dots, x_n$ ale funcției f împart domeniul ei de definiție în intervale, astfel încît pe fiecare dintre aceste intervale funcția f își păstrează semnul, iar trecînd prin punctele $x_1, x_2, \dots, x_n$, această funcție își schimbă semnul.

Schimbarea semnului funcției f se reprezintă grafic prin „curba semnelor”:



Această reprezentare se interpretează astfel: pe intervalele unde „curba semnelor” e situată deasupra axei numerelor este adevărată inegalitatea $f(x)>0$, iar pe intervalele unde „curba semnelor” e situată sub axa numerelor este adevărată inegalitatea $f(x)<0$.

Această metodă de rezolvare a inecuațiilor este numită ***metoda intervalelor***.

APLICĂM

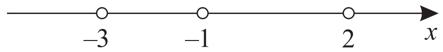
• Rezolvați în ℝ inecuația $(x-2)(x+1)(x+3)>0$.

Rezolvare:

Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=(x-2)(x+1)(x+3)$.

Aflăm zerourile funcției f: $f(x)=0$ pentru $x_1=-3,\ x_2=-1,\ x_3=2$.

Reprezentăm pe axa numerelor zerourile funcției f:

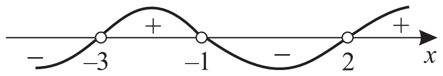


Determinăm semnul funcției f pe $(2, +\infty)$. Pentru aceasta, luăm un punct arbitrar din intervalul dat şi aflăm semnul funcției f în punctul ales:

$$4 \in (2, +\infty),\ f(4) = 2 \cdot 5 \cdot 7 = 70 > 0.$$

Prin urmare, $f(x) > 0$ pentru $x \in (2, +\infty)$.

Procedăm similar pentru celelalte intervale şi construim „curba semnelor”:



Aşadar, $f(x) > 0$ pentru $x \in (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

Răspuns: $S = (-3, -1) \cup (2, +\infty)$.

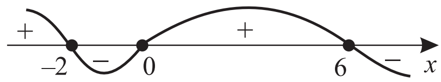
• Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $x(6-x)(x+2) \le 0$.

Rezolvare:

Fie funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x(6-x)(x+2)$. Aflăm zerourile funcției f:

$f(x) = 0$ pentru $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 6$.

Construim „curba semnelor”:



Aşadar, $f(x) \le 0$ pentru $x \in [-2, 0] \cup [6, +\infty)$.

Răspuns: $S = [-2, 0] \cup [6, +\infty)$.

2.3. Inecuații raționale

INVESTIGĂM

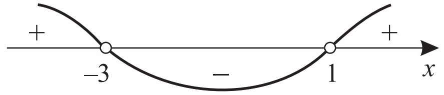
Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\dfrac{2x+6}{x-1} < 0$.

Rezolvare:

$\dfrac{2x+6}{x-1} < 0 \Leftrightarrow (2x+6)(x-1) < 0$.

Fie funcția $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = (2x+6)(x-1)$. Avem $g(x) = 0$ pentru $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

Construim „curba semnelor”:



Obținem $g(x) < 0$ pentru $x \in (-3, 1)$.

Răspuns: $S = (-3, 1)$.

Definiție

Inecuațiile de forma $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \ge 0$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \le 0$, unde $P(X)$, $Q(X)$ sînt polinoame corespunzătoare numărătorului $P(x)$ şi respectiv numitorului $Q(x)$, se numesc **inecuații raționale cu o necunoscută**.

Observație. Inecuația $\frac{2x+6}{x-1}<0$ poate fi rezolvată şi fără a fi înlocuită cu inecuația $(2x+6)(x-1)<0$, echivalentă ei. Pentru aceasta, cercetăm funcția $f\colon \mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+6}{x-1}$, aflăm zerourile ei (zerourile numărătorului) şi zerourile numitorului fracției algebrice corespunzătoare şi le reprezentăm pe axa numerelor. Apoi construim „curba semnelor" şi selectăm intervalele respective.

La rezolvarea prin metoda intervalelor a inecuațiilor raționale cu o necunoscută la numitor poate fi aplicat următorul *algoritm*:

① Efectuăm transformările necesare şi scriem inecuația sub forma $\frac{P(x)}{Q(x)}>0$ $(\geq, <, \leq)$, unde $P(X)$ şi $Q(X)$ sînt polinoame corespunzătoare numărătorului $P(x)$ şi respectiv numitorului $Q(x)$.

② Aflăm mulțimea D care se obține excluzînd din $\mathbb{R}$ soluțiile ecuației $Q(x)=0$.

③ Definim funcția $f\colon D\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$.

④ Aflăm zerourile funcției, adică zerourile numărătorului, rezolvînd ecuația $P(x)=0$.

⑤ Reprezentăm pe axa numerelor domeniul D şi zerourile funcției f.

⑥ Construim „curba semnelor".

⑦ Selectăm intervalele corespunzătoare semnului funcției f.

⑧ Scriem răspunsul.

APLICĂM

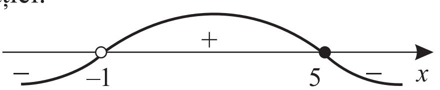
• Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{5-x}{2x+2}\geq 0$.

Rezolvare:

$2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Fie funcția $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{5-x}{2x+2}$. Avem $f(x)=0$ pentru $x=5$. Ținem cont că 5 este soluție, iar –1 nu este soluție a inecuației.

Construim „curba semnelor":



Aşadar, $f(x)\geq 0$ pentru $x\in(-1, 5]$.

Răspuns: $S=(-1, 5]$.

Observații. **1.** Valorile pentru care funcția f nu este definită (zerourile numitorului) nu se includ în mulțimea soluțiilor inecuației inițiale (grafic, pe axă ele se reprezintă prin cerculețe necolorate).

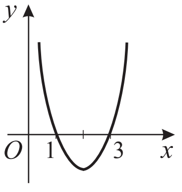
2. Zerourile funcției f (zerourile numărătorului) nu aparțin mulțimii soluțiilor inecuației date, dacă această inecuație conține semnul „ > " sau „ < ". Zerourile funcției f aparțin mulțimii soluțiilor, dacă inecuația inițială conține semnul „ ≥ " sau „ ≤ " (grafic, pe axă ele se reprezintă prin cerculețe colorate).

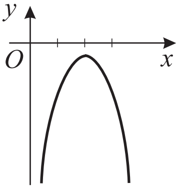
Exerciții și probleme

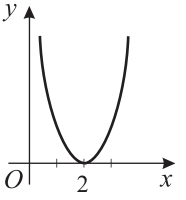
Fixăm cunoștințele

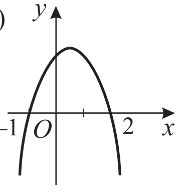
1. Precizați dacă sînt echivalente inecuațiile:
a) $x^2 \le 1$ şi $x \le 1$; b) $x^2 > 4$ şi $x > 2$; c) $(x+3)^2 \ge 0$ şi $(x+5)^2 \ge 0$.

2. Funcția $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \ne 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, este definită de graficul ei. Determinați, cu ajutorul graficului, mulțimile soluțiilor inecuațiilor $f(x) > 0$, $f(x) \ge 0$, $f(x) < 0$, $f(x) \le 0$.

a)


b)


c)


d)


3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $6x^2 - 7x + 2 > 0$; b) $-x^2 - 2x + 48 < 0$; c) $8x^2 + 10x - 3 \le 0$; d) $25x^2 - 10x + 1 > 0$;
e) $49x^2 - 28x + 4 \le 0$; f) $4x^2 - 4x + 15 > 0$; g) $7x < x^2$; h) $4x^2 - x < 5$;
i) $x^2 \ge 16$; j) $9 - x^2 > 0$; k) $16x^2 + 1 \le 8x$; l) $3x^2 + 27 > 0$.

4. Folosind metoda intervalelor, rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $(x+8)(x-5) > 0$; b) $x(x+2) \le 0$; c) $\frac{x-5}{x+6} < 0$; d) $\frac{x+1}{x+4} \ge 0$; e) $\frac{2x-1}{1-3x} \ge 0$.

Formăm capacitățile și aplicăm

5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $x(x+5) - 2 > 4x$; b) $(x+4)(x+5) - x \le 5$;
c) $(5x+1)(3x-1) > (4x-1)(x+2)$; d) $2x(3x-1) \ge 4x^2 + 5x + 9$.

6. Compuneți o inecuație de gradul II cu mulțimea soluțiilor:
a) $S = \mathbb{R}$; b) $S = \varnothing$; c) $S = [-2, 3]$; d) $S = (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$; e) $S = \{3\}$.

7. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $3x^2 + 4 \le 10 - x(x-2)$; b) $(3x-2)^2 \ge 3x(x-1)$;
c) $\frac{-3}{x^2 + x - 20} \ge 0$; d) $\frac{1}{x^2 + 5x + 7} < 0$.

8. Determinați domeniul de definiție al funcției $f\colon D \to \mathbb{R}$:
a) $f(x) = \sqrt{1 - x - 2x^2}$; b) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x^2 + 12x}}$.

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația:
a) $x(x+2)(x-3) < 0$; b) $(2x+1)(3-x)(x+5) \ge 0$; c) $(x-1)(x^2 - 5x + 6) \le 0$;
d) $(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 2x) > 0$; e) $\frac{(2x+1)(3-x)}{x^2+4} > 0$; f) $\frac{x^2 - x - 2}{x} \le 0$; g) $\frac{x^2 - x - 6}{x - 1} \ge 0$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

10. Poate fi decupat dintr-o foaie de hîrtie cu dimensiunile de 10 cm şi 3 cm un dreptunghi care are lățimea cu 4 cm mai mică decît lungimea şi aria mai mare de 21 cm^2?

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $\frac{4x-2}{3x+5} + 4 \le 0$; b) $3 - x \ge \frac{1}{2-x}$; c) $x + \frac{2}{x} > 3$; d) $\frac{7x-5}{x+1} > x$.

12. Rezolvați în $\mathbb{Z}$ sistemul de inecuații $\begin{cases} \dfrac{x^2-7x+6}{3x^2-x+1}<0, \\ x^2<36. \end{cases}$

13. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații:

a) $\begin{cases} 3x-12>0, \\ -x^2+3x+4>0; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2+5x\le 0, \\ 7+x>0; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+4x-5>0, \\ x^2-2x-8<0. \end{cases}$

14. Determinați domeniul de definiție al funcției $f\colon D\to\mathbb{R}$:

a) $f(x)=\sqrt{-x^2+x+30}+\dfrac{1}{x-1}$; b) $f(x)=\sqrt{x^2-x-42}+\sqrt{100-x^2}$.

15. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația dublă: a) $-4\le x^2-5x+2\le -2$; b) $-1<x^2+2x<3$.

16. Aflați valorile parametrului real m, astfel încît inecuația să fie adevărată pentru orice x real:

a) $5x^2-x+m>0$; b) $mx^2-10x-5<0$.

17. Determinați valorile parametrului real a pentru care inecuația nu are soluții:

a) $x^2+ax+1<0$; b) $ax^2+4ax+5\le 0$.

Exerciții și probleme recapitulative

■ Fixăm cunoștințele

1. Determinați cea mai mare soluție întreagă a inecuației:

a) $x+2\ge 2{,}5x-1$; b) $x-\dfrac{x+4}{4}+\dfrac{3x-1}{2}<3$.

2. Aflați cel mai mic număr natural ce aparține mulțimii soluțiilor inecuației $3x-2<1{,}5x+4$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $x^2+3x+2>0$; b) $2x<x^2$; c) $4x^2<1$; d) $(x-3)(x+7)\ge 0$; e) $x^2-x+3>0$; f) $\dfrac{x-5}{3x+3}\le 0$.

■■ Formăm capacitățile și aplicăm

4. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații: a) $\begin{cases} x-4>5-2x, \\ 3-2x<7+x; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 10x-2>4x+1, \\ 2x-\dfrac{2}{3}>\dfrac{3x}{2}-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

5. Aflați cel mai mic număr întreg care aparține domeniului de definiție al funcției definite prin formula $f(x)=\sqrt{4+x+\dfrac{3}{x}}$.

6. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația: a) $(x-4)^2+12\ge(3x-2)^2$; b) $3x(x+\sqrt{3})\le(x+\sqrt{3})^2$; c) $\dfrac{(x-2)(x^2+4)}{3x+1}\le 0$; d) $\dfrac{7x}{3x-4}\ge 1$.

7. Pentru care valori ale lui x valoarea funcției $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2-14x+20$, este mai mare decît valorile corespunzătoare ale funcției $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-2x-16$?

8. Determinați legitatea și aflați numărul omis:

$\dfrac{x^2-6x+8}{x-5}\ge 0$	$2\dfrac{4}{7}$
$\dfrac{x+3}{10x-x^2-16}\le 0$	?

■■■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

9. Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul de inecuații: a) $\begin{cases} x-2>5x-\dfrac{x-3}{2}, \\ |3x+2|<10; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-2|\ge 6, \\ |x-5|\le 3. \end{cases}$

10. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația dublă $1<\frac{7x-2}{2x+1}<3$.

11. Rezolvați în $\mathbb{R}$ inecuația $\frac{|x+1|}{x^2+4x-12}\geq 0$.

12. Aflați valorile parametrului real a pentru care inecuația $ax^2-8ax+3a+7\geq 0$ nu are soluții în $\mathbb{R}$.

13. Determinați valorile parametrului real a, astfel încît orice $x\in\mathbb{R}$ să fie soluție a inecuației $(a^2-1)x^2+2(1-a)x+2\geq 0$.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. Fie expresiile $E_1=\frac{2x-5}{3}$ și $E_2=-\frac{4x+1}{5}$.

a) Aflați valorile reale ale lui x, astfel încît $E_1<E_2$. **4p**

b) Aflați valorile reale ale lui x pentru care suma expresiilor E_1 și E_2 este un număr nenegativ. **4p**

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}E_1>0,\\ E_2\leq 0.\end{cases}$ **5p**

2. Șirul (a_n) este definit prin formula $a_n=7n+2$.
Arătați că șirul (a_n) este crescător. **4p**

3. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-2x^2+x-3$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x+5$.

a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă: **2p**

„Funcția g ia valori pozitive pentru $x\in(5,+\infty)$”.

A **F**

b) Aflați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\frac{f(x)}{g(x)}\geq 0$. **7p**

4. La o piscină, costul este de 20 lei pe oră, iar consumația minimă este de 40 lei. La o altă piscină, costul este de 15 lei pe oră, iar consumația minimă este de 60 lei. Determinați după cîte ore a doua piscină este mai avantajoasă decît prima. **6p**

Varianta II

1. Fie expresiile $M_1=\frac{1-3x}{2}$ și $M_2=\frac{2x+3}{7}$.

a) Aflați valorile reale ale lui x, astfel încît $M_1<M_2$.

b) Aflați valorile reale ale lui x pentru care diferența M_1-M_2 este un număr nenegativ.

c) Rezolvați în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases}M_1\leq 0,\\ M_2>0.\end{cases}$

2. Șirul (b_n) este definit prin formula $b_n=-3n+1$.
Arătați că șirul (b_n) este descrescător.

3. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x+6$, și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3x^2-8x-3$.

a) Indicați litera **A** dacă propoziția este adevărată, sau litera **F** dacă ea este falsă:

„Funcția f ia valori negative pentru $x\in(6,+\infty)$”.

A **F**

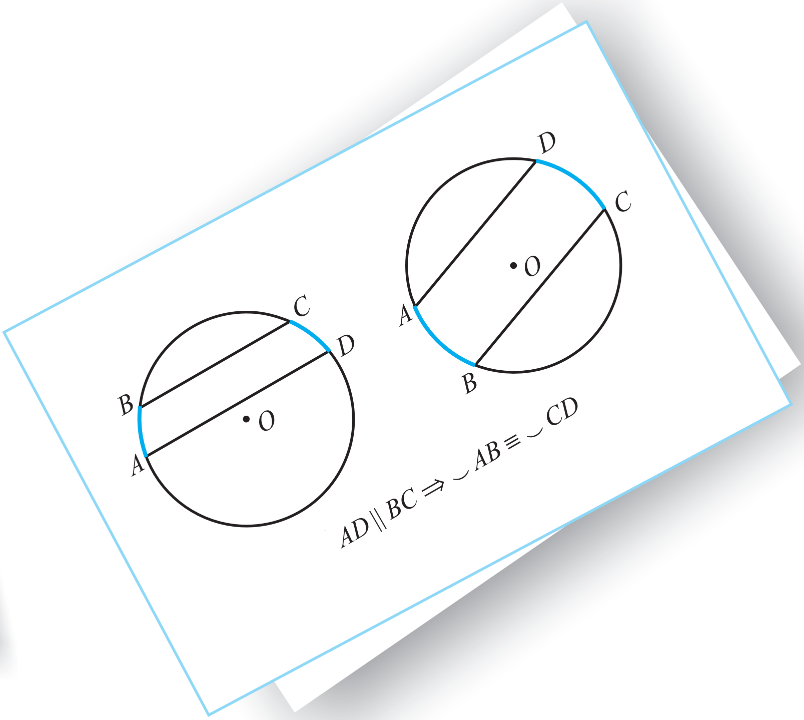
b) Aflați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $\frac{f(x)}{g(x)}\leq 0$.

4. Compania „Moldnet” propune conectarea la internet la prețul de 240 lei pentru instalare și taxa lunară de 150 lei. Compania „Supernet”, oferind aceeași viteză a internetului, propune conectarea la prețul de 300 lei pentru instalare și taxa lunară de 140 lei. Determinați după cîte luni oferta companiei „Moldnet” devine mai convenabilă.

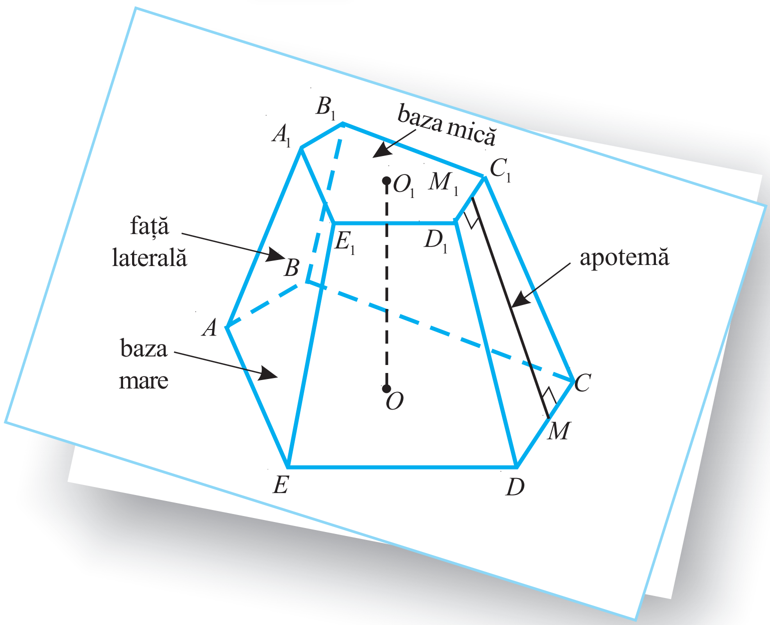
Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	32–30	29–27	26–24	23–20	19–15	14–10	9–7	6–4	3–2	1–0

GEOMETRIE



B
C
D
A
O
D
C
O
A
B
AD || BC ⇒ ⌣AB ≡ ⌣CD



B_1
A_1
baza mică
C_1
O_1
M_1
față laterală
E_1
D_1
apotemă
B
A
baza mare
C
O
M
E
D

Capitolul

1 Recapitulare și completări

§1. Puncte, linii, plane, unghiuri

1.1. Poziții relative în plan

✓ ***Două puncte***

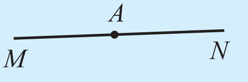
Puncte confundate	Puncte distincte
$A \bullet B$	$A \bullet \qquad \bullet B$
Notăm: $A = B$.	*Notăm*: $A \neq B$.

Punctul este cea mai simplă figură geometrică. Toate celelalte figuri geometrice sînt compuse din puncte.
O figură geometrică este o mulțime de puncte.
Porțiunea dreptei AB cuprinsă între punctele A şi B se numeşte ***segment deschis*** şi se notează (AB). Punctele A şi B se numesc ***extremitățile*** (sau ***capetele***) segmentului.
Segmentul închis AB se notează $[AB]$ şi este format din (AB) şi punctele A, B.

✓ ***Un punct şi o dreaptă***

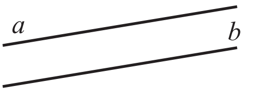
Punctul aparține dreptei.	Punctul nu aparține dreptei.
	
Notăm: $A \in d$.	*Notăm*: $A \notin d$.

Trei sau mai multe puncte ale unei drepte se numesc ***puncte coliniare***.
Dacă punctul A aparține dreptei d, atunci dreapta d este împărțită de acest punct în două ***semidrepte complementare*** (sau ***opuse***).



În desen, punctul A este ***originea*** semidreptelor complementare $(AM$ şi $(AN$.
Semidreapta ce nu conține originea ei se numeşte ***deschisă***. Semidreapta $[AM$ este ***închisă***, iar semidreapta $(AM$ – ***deschisă***.

✓ *Două drepte*

Drepte confundate	Drepte concurente	Drepte paralele
		
Notăm: $a = b$.	*Notăm*: $a \cap b = \{M\}$.	*Notăm*: $a \parallel b$.

✓ *Două drepte paralele intersectate de o secantă*

Dreptele paralele a şi b formează cu secanta c următoarele perechi de unghiuri (fig. 1):

a) *congruente*:

- alterne interne: $\angle 3, \angle 6$; $\angle 4, \angle 5$
- alterne externe: $\angle 1, \angle 8$; $\angle 2, \angle 7$
- corespondente: $\angle 1, \angle 5$; $\angle 2, \angle 6$; $\angle 3, \angle 7$; $\angle 4, \angle 8$

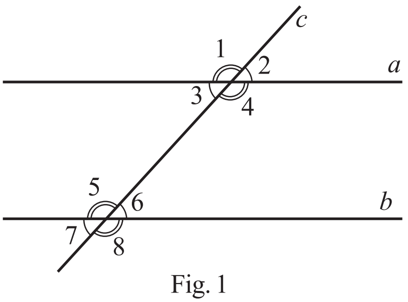


Fig. 1

b) *suplementare* (adică avînd suma măsurilor lor egală cu $180°$):

- interne de aceeaşi parte a secantei: $\angle 3, \angle 5$; $\angle 4, \angle 6$
- externe de aceeaşi parte a secantei: $\angle 1, \angle 7$; $\angle 2, \angle 8$

Pentru a afirma că două drepte intersectate de o secantă sînt paralele, este suficient să ne convingem că unghiurile unei perechi dintre cele menționate posedă proprietatea respectivă (sînt congruente sau suplementare).

Exercițiu. Dreptele d_1 şi d_2 din figura 2 sînt paralele. Aflați măsurile necunoscute ale unghiurilor (x, y, z, t, u, v, w).

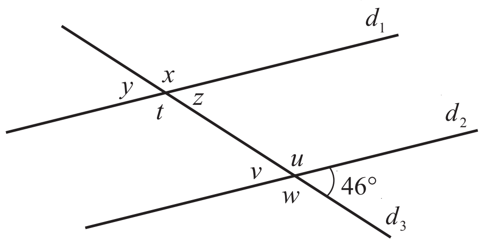
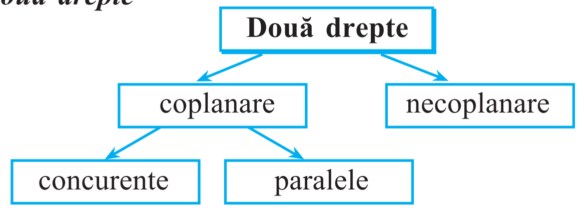


Fig. 2

1.2. Poziții relative în spațiu

✓ ***Două drepte***



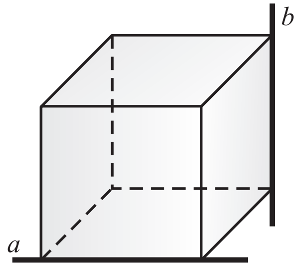
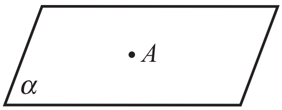
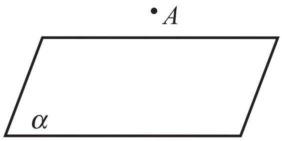


Fig. 3

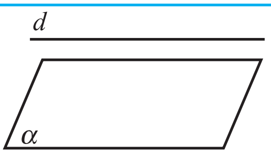
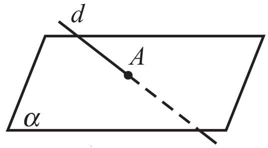
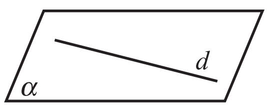
Două drepte care nu pot fi situate în același plan sînt ***necoplanare***.

În figura 3, dreptele a şi b (care conțin două muchii ale diferitor fețe ale cubului) sînt necoplanare.

✓ ***Un punct şi un plan***

Punctul aparține planului.	Punctul nu aparține planului.
	
Notăm: $A \in \alpha$	*Notăm:* $A \notin \alpha$

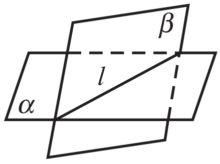
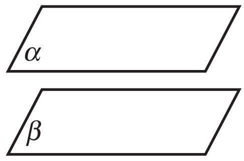
✓ ***O dreaptă şi un plan***

Dreapta este paralelă cu planul.	Dreapta intersectează planul.	Dreapta aparține planului.
		
Notăm: $d \parallel \alpha$ sau $d \cap \alpha = \varnothing$.	*Notăm:* $d \cap \alpha = \{A\}$.	*Notăm:* $d \subset \alpha$.

Definiție

O **dreaptă** se numeşte **paralelă cu un plan** dacă ea nu are puncte comune cu planul.

✓ ***Două plane***

Planele coincid (sînt confundate).	Planele se intersectează.	Planele sînt paralele.
		
Notăm: $\alpha = \beta$.	*Notăm:* $\alpha \cap \beta = l$.	*Notăm:* $\alpha \parallel \beta$.

Definiție

Două plane se numesc **plane paralele** dacă ele nu au niciun punct comun.

Observăm că intersecția a două plane este o dreaptă. Astfel, două plane nu pot avea doar un punct comun, doar două puncte comune, doar trei puncte comune etc.

Teoremă

Dacă un punct aparține planelor diferite α și β, atunci ele au o unică dreaptă comună.

• Ce formă va avea în fiecare caz linia de tăiere (fig. 4), dacă dintr-o lovitură aplicată de fiecare cuțit sub un unghi de 45° vom „perfora” planul α? Justificați.

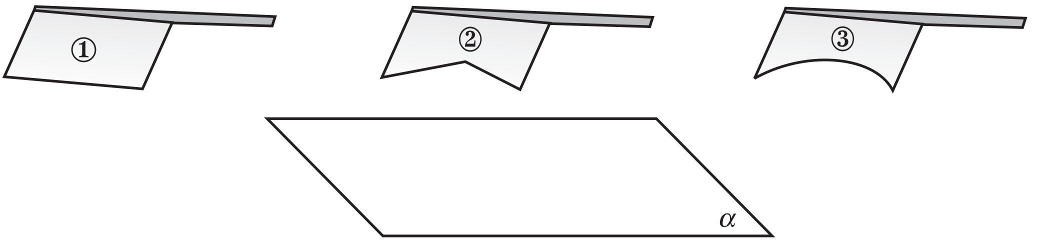
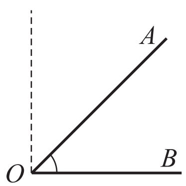
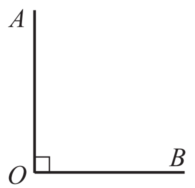
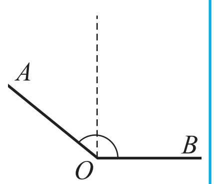


Fig. 4

1.3. Unghiuri

✓ ***Un unghi***

Unghi ascuțit	Unghi drept	Unghi obtuz	Unghi alungit (întins)	Unghi nul
				
Notăm: $m(\angle AOB) < 90°$.	*Notăm*: $m(\angle AOB) = 90°$.	*Notăm*: $m(\angle AOB) > 90°$.	*Notăm*: $m(\angle AOB) = 180°$.	*Notăm*: $m(\angle AOB) = 0°$.

Unghiurile alungite şi cele nule se numesc ***unghiuri improprii***, celelalte unghiuri se numesc ***unghiuri proprii***.

Două unghiuri proprii se numesc ***unghiuri adiacente*** dacă au acelaşi vîrf, o latură comună, iar celelalte două laturi sînt situate de părți diferite ale laturii comune.

Unghiurile AOB şi BOC din figura 5 sînt adiacente.

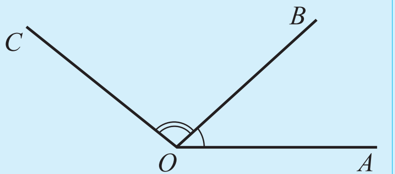
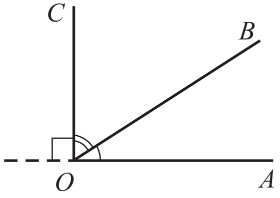
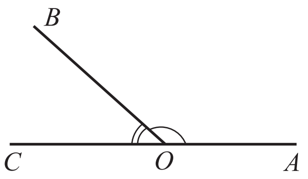
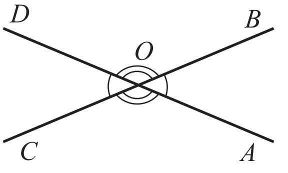
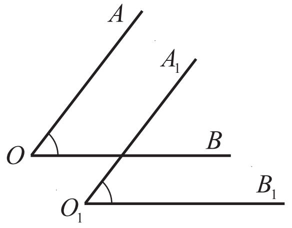
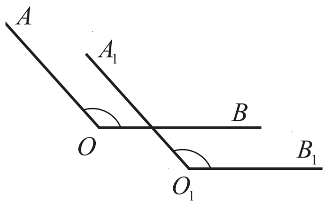
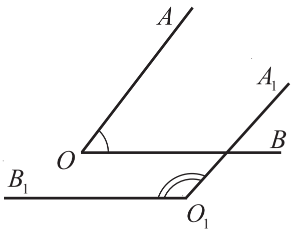


Fig. 5

✓ ***Două unghiuri cu acelaşi vîrf*** (cazuri speciale)

Unghiuri adiacente complementare	Unghiuri adiacente suplementare	Unghiuri opuse la vîrf
		
$m(\angle AOB)+m(\angle BOC)=90°$	$m(\angle AOB)+m(\angle BOC)=180°$	$\angle AOB\equiv\angle COD$ $\angle AOC\equiv\angle BOD$

✓ ***Două unghiuri cu laturile respectiv paralele***

		
$\angle AOB\equiv\angle A_1O_1B_1$	$\angle AOB\equiv\angle A_1O_1B_1$	$m(\angle AOB)+m(\angle A_1O_1B_1)=180°$

Exerciţii şi probleme

Fixăm cunoştinţele

1. Citiţi:

a) $A\in b,\ M\notin c,\ \{N\}=b\cap c$; b) $d\subset\beta,\ [MN]\subset\alpha,\ a\cap b=\{K\}$;

c) $MN>AB,\ A\notin\alpha,\ l\subset\alpha$; d) $d\parallel l,\ AB\perp m,\ \{A, B, C\}\subset\beta$.

2. Realizaţi cîte un desen pentru fiecare din cazurile a)–d) ale exerciţiului **1**.

3. Selectaţi propoziţiile matematice şi stabiliţi valoarea lor de adevăr:

a) „Mărul este legumă.” b) „Compasul este o figură geometrică.”

c) „O lecţie durează 45 min.” d) „Oricare ar fi dreapta, există puncte ce-i aparţin.”

e) „Două segmente congruente au lungimi egale.”

4. Formulaţi negaţia fiecăreia dintre propoziţiile exerciţiului **3**.

5. Unul dintre cele 4 unghiuri formate de două drepte concurente are măsura de 36°. Aflaţi măsurile celorlalte unghiuri.

6. Aflaţi măsurile a două unghiuri:

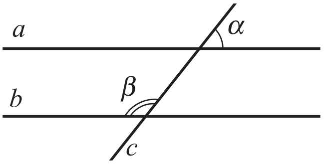
a) opuse la vîrf şi complementare;

b) suplementare, ştiind că măsura unui unghi este cu 30° mai mică decît a celuilalt;

c) complementare, ştiind că măsura unui unghi este de 9 ori mai mare decît a celuilalt;

d) congruente şi adiacente, ştiind că măsura unghiului format de bisectoarele lor este de 70°.

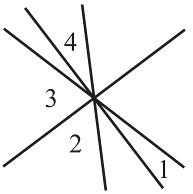
7. Dreptele a şi b din desen sînt paralele.
Aflaţi măsurile unghiurilor formate de secanta c cu dreptele a şi b, dacă:
a) $\alpha = 41°$; b) $\beta = 108°$; c) $\beta - \alpha = 32°$.



8. Formaţi cu ajutorul expresiilor de pe fîşii propoziţii adevărate de forma: „Dacă..., atunci...”.

- două unghiuri sînt opuse la vîrf
- două drepte coplanare nu sînt concurente
- două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente
- ele sînt paralele
- două drepte sînt perpendiculare pe a treia (coplanară cu ele)
- ele sînt congruente
- două unghiuri formate de două drepte paralele cu o secantă sînt corespondente
- două unghiuri au măsuri egale
- ele sînt concurente
- distanța dintre două drepte diferite este 0
- ele sînt suplementare
- două unghiuri sînt drepte

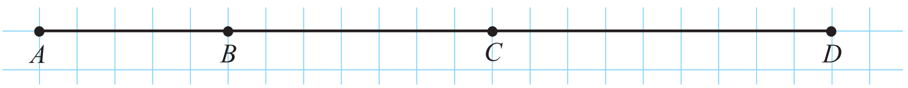
9. Examinaţi desenul. Se ştie că $\angle 1 = 15°$, $\angle 3 = 75°$, iar unghiul 2 are măsura de 2 ori mai mare decît a unghiului 4.
Aflaţi măsura unghiului 4.



Formăm capacitățile și aplicăm

10. Punctele A, B, C sînt situate, în această ordine, pe o dreaptă şi $AB : BC = 5 : 3$. Aflaţi:
a) $\dfrac{AB}{AC}$; b) $\dfrac{AC}{BC}$.

11. Examinaţi desenul şi calculaţi raportul lungimilor segmentelor:
a) AB şi CD; b) AC şi AD; c) BC şi BD; d) AD şi AB.



12. Punctul C aparține segmentului AB, astfel încît $\dfrac{AC}{BC} = \dfrac{3}{4}$. Calculaţi raportul:
a) $\dfrac{AB}{AC}$; b) $\dfrac{BC}{AB}$; c) $\dfrac{AB}{AB - BC}$; d) $\dfrac{AB - AC}{AB + BC}$.

13. Calculaţi:
a) MN, dacă raportul lungimilor segmentelor MN şi KP este egal cu 2,4 şi $KP = 4$ cm;
b) KP, dacă raportul lungimilor segmentelor MN şi KP este egal cu 4,2 şi $MN = 21$ cm;
c) raportul lungimilor segmentelor MN şi KP, dacă $[MN]$ este de 3 ori mai scurt decît $[KP]$.

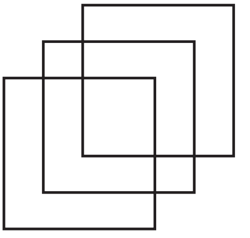
14. Împărţiţi un segment de 12 cm în 3 segmente ale căror lungimi sînt proporţionale cu numerele 1, 2, 3.

15. Împărţiţi un segment de 13,5 cm în 3 segmente ale căror lungimi sînt proporţionale cu numerele 2, 4, 3.

16. Formulați reciprocele propozițiilor obținute la rezolvarea exercițiului 14. Stabiliți valoarea lor adevăr.

17. Pe o dreaptă au fost marcate la distanțe egale unul de altul 10 puncte, astfel încît primul şi ultimul determină un segment de lungime x. Pe altă dreaptă au fost marcate similar (la aceeaşi distanță) 100 de puncte, astfel încît primul şi ultimul formează un segment de lungime y. De cîte ori x este mai mic decît y?

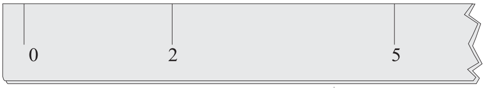
18. Se poate construi figura din desen fără a ridica creionul şi fără a redesena vreun segment?



19. Demonstrați prin contraexemple că următoarele propoziții sînt false:
a) „Orice număr de forma $\sqrt{a}$, unde $a \in \mathbb{N}$, este irațional.”
b) „Cîtul oricăror două numere iraționale este un număr irațional.”
c) „Dacă o secantă formează cu dreptele a şi b patru unghiuri de $70°$ şi alte 4 unghiuri de $110°$, atunci dreptele a şi b sînt paralele.”
d) „Orice număr rațional poate fi scris sub formă de fracție în mod univoc.”

Dezvoltăm capacitățile și creăm

20. Pe rigla din desen sînt indicate doar notațiile 0 cm, 2 cm şi 5 cm. Cum se poate construi cu ajutorul ei un segment cu lungimea de 6 cm?



21. Cum se poate tăia, fără instrumente de măsurat, dintr-un cablu cu lungimea de $\frac{2}{3}$ m o bucată de 50 cm?

22. Împărțiți un pătrat în două:
a) patrulatere congruente, fiecare cu orice 2 laturi necongruente;
b) pentagoane congruente;
c) hexagoane congruente.

§2. Poligoane

2.1. Elementele triunghiului. Clasificarea triunghiurilor

• Observați figurile 6–8 şi completați casetele, astfel încît să obțineți propoziții adevărate.

a) Laturile triunghiului XYZ sînt ______.

b) $[YB]$ este bisectoarea triunghiului XYZ, deoarece ______.

c) $[YH]$ este înălțimea triunghiului XYZ, deoarece ______.

d) Segmentul ______ este ______ triunghiului XYZ, deoarece $XM = MZ$.

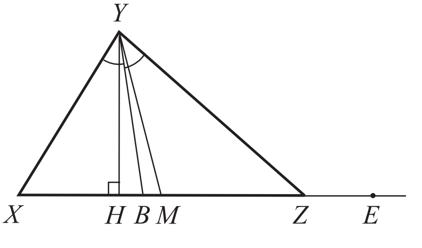


Fig. 6

e) Triunghiul XYZ este ________, deoarece $XY \neq YZ$, $XZ \neq YZ$, $XY \neq XZ$.
Triunghiul XYZ este ________, deoarece toate unghiurile lui sînt ascuțite.

f) Unghiul YZE este un unghi ________ al triunghiului XYZ şi
$m(\angle YZE) = m(\angle X) + $ ____.

g) Triunghiul ISO este ________, deoarece $IS = SO$.
Prin urmare, unghiurile ________ sînt congruente.
Triunghiul ISO este ________, deoarece
$m(\angle S) > 90°$.

h) Triunghiul ISO are mediana ____, bisectoarea ____
şi înălțimea ST.

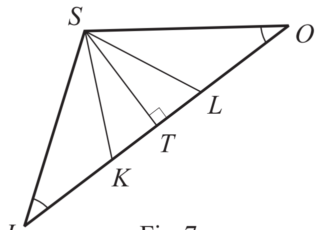


Fig. 7

i) Triunghiul dreptunghic DRE are catetele ________
şi $DR^2 = $ ____ $-$ ____.

j) $[AC]$ este linie mijlocie a triunghiului DRE, deoarece
____ $= AD$ şi $RC = $ ____.
Prin urmare, $2AC = $ ____ şi $AC \parallel$ ____.

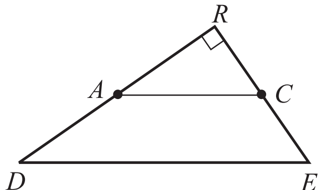


Fig. 8

2.2. Congruența și asemănarea triunghiurilor

Definiție

Două **triunghiuri** se numesc **congruente** dacă au laturile respectiv congruente şi unghiurile respectiv congruente.

Notația $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$ se citeşte „Triunghiurile ABC şi DEF sînt congruente”.

Exercițiu. Triunghiurile TRI şi UNG sînt congruente. Completați: $[IT] \equiv$ ____, $[UN] \equiv$ ____, ____ $\equiv [NG]$, ____ $\equiv \angle R$, $\angle T \equiv$ ____, ____ $\equiv$ ____.

	Criteriile de congruență a triunghiurilor
LUL	Dacă două laturi şi unghiul dintre ele ale unui triunghi sînt respectiv congruente cu două laturi şi unghiul dintre ele ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt congruente.
ULU	Dacă o latură şi unghiurile alăturate ei ale unui triunghi sînt respectiv congruente cu o latură şi unghiurile alăturate ei ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt congruente.
LLL	Dacă laturile unui triunghi sînt respectiv congruente cu laturile altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt congruente.

Problemă. Examinați figura 9.
Aplicînd criteriile de congruență, găsiți perechi de triunghiuri congruente, dacă:

$AB = DC,\ AD = BC,$

$AC = FE,\ AF = CE,$

$\angle HAC \equiv \angle GEF,$

$\angle BCF \equiv \angle GFC,$

$\angle ACB \equiv \angle EFG.$

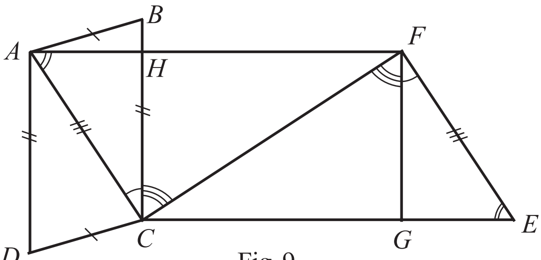


Fig. 9

Definiție

Două **triunghiuri** se numesc **asemenea** dacă ele au unghiurile corespunzătoare congruente, iar laturile corespunzătoare sînt proporționale.

Notația $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ se citeşte „Triunghiurile *ABC* şi *DEF* sînt asemenea”.

Exercițiu. Triunghiurile *TRI* şi *UNG* sînt asemenea. Completați:

$$\frac{TR}{\square} = \frac{TI}{UG} = \frac{\square}{\square}, \qquad \angle T \equiv \square, \qquad \square \equiv \angle R, \qquad \square \equiv \square.$$

	Criteriile de asemănare a triunghiurilor
UU	Dacă două unghiuri ale unui triunghi sînt congruente cu două unghiuri ale altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt asemenea.
LUL	Dacă două laturi ale unui triunghi sînt proporționale cu două laturi ale altui triunghi şi unghiurile formate de aceste laturi sînt congruente, atunci aceste triunghiuri sînt asemenea.
LLL	Dacă laturile unui triunghi sînt proporționale cu laturile altui triunghi, atunci aceste triunghiuri sînt asemenea.

Exercițiu. Formulați criteriile de asemănare pentru două triunghiuri dreptunghice.

Problemă. Examinați figura 10.
Aplicînd criteriile de asemănare, găsiți perechi de triunghiuri asemenea, dacă:

$BF \parallel CE,\ \dfrac{BC}{FG} = \dfrac{BD}{HF},\ \dfrac{AB}{DF} = \dfrac{AF}{DE},$

$\angle A \equiv \angle EDF,\ \angle BCD \equiv \angle HGF.$

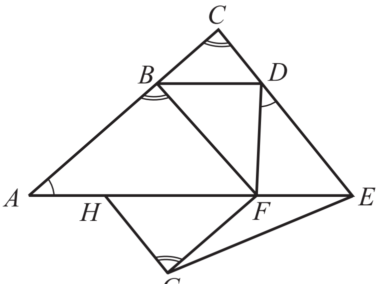


Fig. 10

Teorema lui Thales

Dacă o dreaptă care nu conține niciunul din vîrfurile unui triunghi este paralelă cu o latură a triunghiului, atunci segmentele determinate de această dreaptă pe dreptele suport ale celorlalte două laturi sînt proporționale (fig. 11):

$$\begin{cases} \Delta ABC \\ d \parallel AC \\ d \cap AB = \{A_1\} \\ d \cap BC = \{C_1\} \end{cases} \Rightarrow \frac{A_1A}{A_1B} = \frac{C_1C}{C_1B}.$$

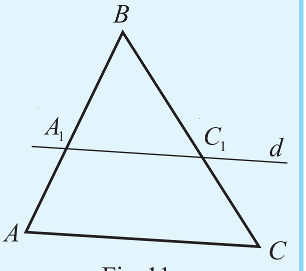


Fig. 11

Exercițiu. Formulați teorema lui Thales pentru triunghiul TRI din figura 12, dacă $l \parallel TI$.

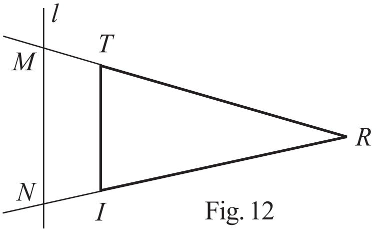


Fig. 12

Problemă. Reciproca teoremei lui Thales de asemenea este teoremă. Formulați reciproca teoremei lui Thales.

2.3. Relații între elementele triunghiului

Teoreme despre elementele triunghiului dreptunghic

Teorema înălțimii

Pătratul înălțimii coborîte din vîrful unghiului drept al unui triunghi dreptunghic este egal cu produsul dintre lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză (fig. 13):

$$AD^2 = BD \cdot DC.$$

Teorema catetei

Pătratul lungimii oricărei catete a unui triunghi dreptunghic este egal cu produsul dintre lungimile ipotenuzei şi proiecției acestei catete pe ipotenuză (fig. 13):

$$AB^2 = BC \cdot BD, \qquad AC^2 = BC \cdot CD.$$

Teorema lui Pitagora

Pătratul lungimii ipotenuzei unui triunghi dreptunghic este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor (fig. 13):

$$BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

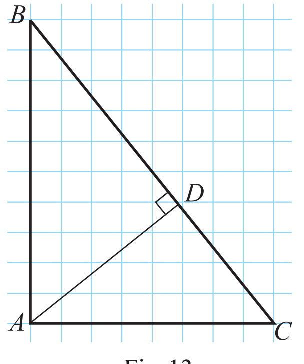
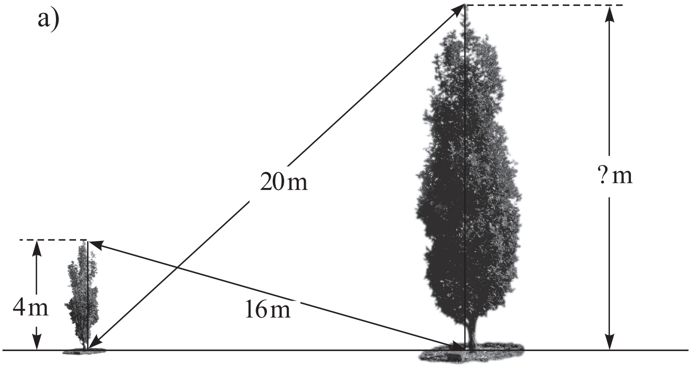


Fig. 13

Probleme. Aplicînd teoreme despre triunghiul dreptunghic, calculați distanțele necunoscute (fig. 14).

a)



b)

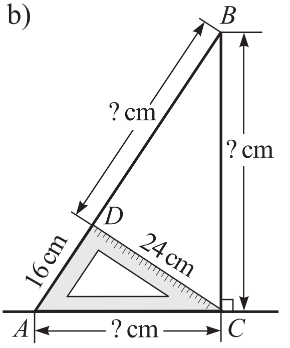


Fig. 14

Teorema bisectoarei (opțional)
Orice bisectoare a triunghiului împarte latura opusă vîrfului din care este construită în segmente proporționale cu celelalte laturi ale triunghiului (fig. 15):

$$\frac{BM}{AB}=\frac{MC}{AC}.$$

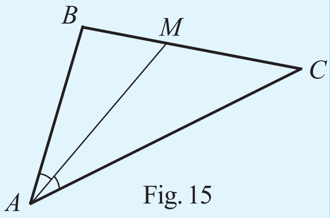
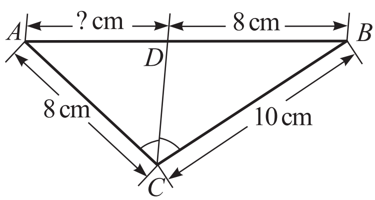


Fig. 15

Problemă. Aplicînd teorema bisectoarei, calculați AD.



2.4. Patrulatere

1 Observați figura 16 și completați casetele, astfel încît să obțineți propoziții adevărate.

a) Laturile patrulaterului $PATR$ sînt ________.

b) Unghiurile patrulaterului $PATR$ sînt ________.

c) Suma măsurilor unghiurilor patrulaterului $PATR$ este egală cu ________.

d) Dacă perimetrul patrulaterului $PATR$ este de 49 cm, $PA+TR=21$ cm și latura PR este cu 2 cm mai lungă decît latura AT, atunci $AT=$ ________ cm.

e) Dacă $PA \parallel TR$, iar $AT \nparallel PR$, atunci $PATR$ este ________.

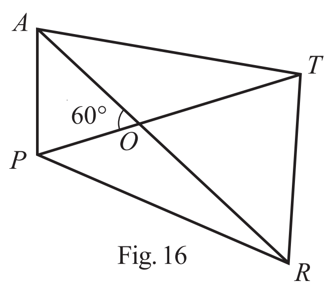
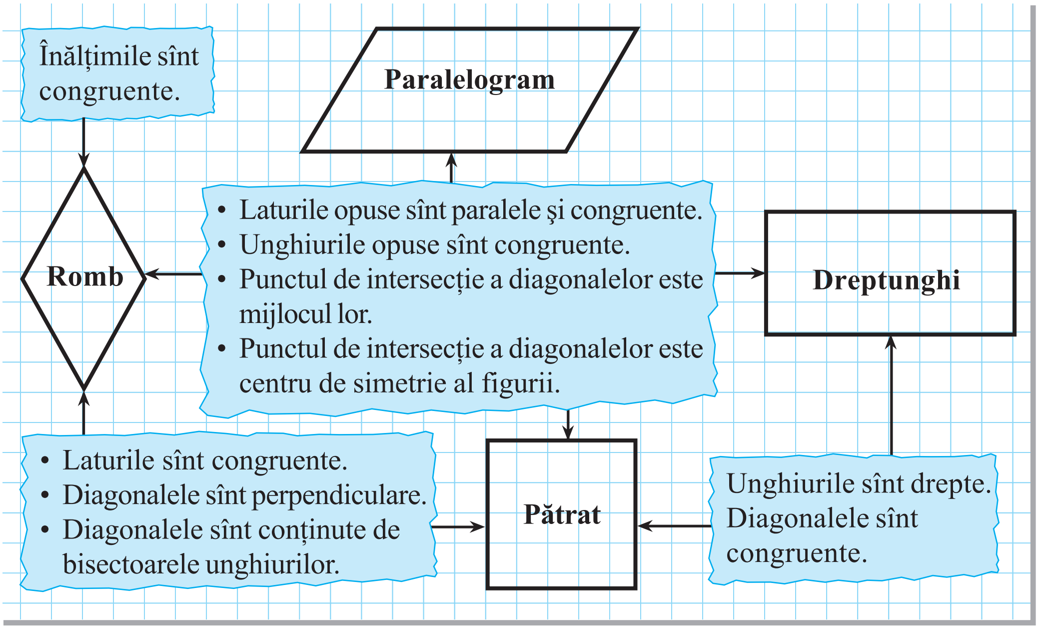


Fig. 16

2 Observați diagrama şi completați casetele, astfel încît să obțineți propoziții adevărate.



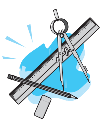
a) Rombul este un paralelogram __________.

b) Pătratul este un romb __________.

c) Pătratul este un dreptunghi __________.

d) __________ este un paralelogram cu unghiuri drepte.

e) __________ este un patrulater cu unghiuri drepte.



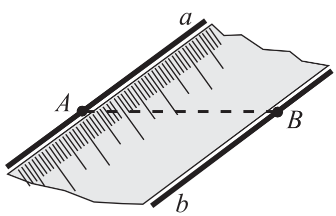
Problemă de construcție

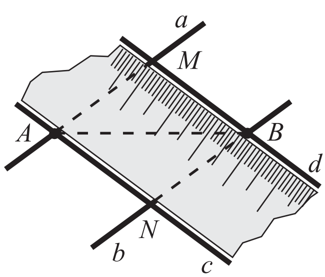
Să construim doar cu ajutorul riglei (negradate) mediatoarea unui segment dat AB.

Rezolvare:

① Fie segmentul AB.

Fixăm rigla astfel, încît marginile ei să atingă capetele segmentului AB şi construim dreptele paralele a şi b.





② Fixăm rigla în altă poziție, astfel încît iarăşi să atingem capetele segmentului AB şi construim dreptele paralele c şi d.

Notăm $\{M\} = a \cap d$ şi $\{N\} = b \cap c$.

③ Patrulaterul *AMBN* este un romb (înălţimile lui sînt congruente, fiind egale cu lăţimea riglei). Prin urmare, $[MN] \perp [AB]$ şi punctul lor de intersecţie este mijlocul lor. Deci, *MN* este mediatoarea segmentului *AB* (fig. 17).

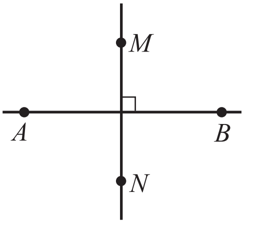


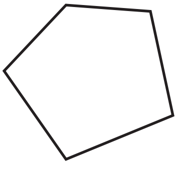
Fig. 17

Observaţie. Algoritmul este valabil pentru orice segment *AB* cu lungimea mai mare decît lăţimea riglei şi mai mică decît lungimea ei. De ce?

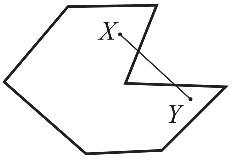
Exerciţiu. Luînd în consideraţie faptul că diagonalele rombului sînt conţinute de bisectoarele lui, construiţi doar cu ajutorul riglei negradate bisectoarea unui unghi ascuţit dat.

2.5. Poligoane cu n ($n > 4$) laturi. Poligoane regulate

Dacă orice două puncte din interiorul unui poligon determină un segment care aparţine interiorului poligonului, atunci poligonul este **convex**, altfel – poligonul este **concav** (fig. 18).



Poligon convex
a)



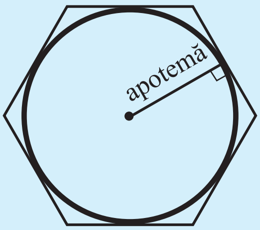
Poligon concav
b)

Fig. 18

• Copiaţi şi completaţi tabelul:

Denumirea poligonului	Numărul de laturi	Numărul diagonalelor ce pornesc dintr-un vîrf al poligonului	Numărul total de diagonale	Suma măsurilor unghiurilor poligonului
Pentagon	5			
	6			720°
Heptagon			14	
Octagon				
Nonagon				
Decagon	10			
Poligon convex cu n laturi	n	$n-3$		

- Un poligon convex cu laturile congruente şi unghiurile congruente se numeşte **poligon regulat**.
- Oricărui poligon regulat i se poate circumscrie un cerc.
- În orice poligon regulat poate fi înscris un cerc. Raza acestui cerc se numeşte **apotema** poligonului regulat.



Astfel, triunghiul echilateral şi pătratul sînt poligoane regulate.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Stabiliți dacă următoarele trei numere pot reprezenta lungimile laturilor unui triunghi (exprimate în aceeaşi unitate de măsură):
a) 9, 10, 16; b) 8, 12, 20; c) $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{11}$; d) $\sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{14}$.

2. Realizați un desen corespunzător situației:
a) punctul M este mijlocul bazei triunghiului obtuzunghic isoscel ABC;
b) triunghiurile ABC şi CMB sînt isoscele şi $AM \cap BC = \{D\}$;
c) triunghiurile ABF şi GDE sînt echilaterale şi $G \in [AF],\ F \in [GE]$;
d) $\Delta BAE \equiv \Delta DEA,\ [BE] \cap AD = \{C\}$.

3. Segmentele AA_1, BB_1 şi CC_1 sînt mediane ale triunghiului ABC. Aflați perimetrul triunghiului ABC, dacă:
a) $BC_1 = 9$ cm, $BA_1 = 10$ cm, $AB_1 = 12$ cm;
b) $BA_1 = 3\sqrt{5}$ cm, $AC_1 = \sqrt{125}$ cm, $CB_1 = 2\sqrt{20}$ cm.

4. Fie triunghiul ABC. Măsura unghiului A este de 2 ori mai mare decît măsura unghiului B şi de 3 ori mai mică decît măsura unghiului C. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului.

5. Construiți un triunghi cu laturile de 6 cm, 7 cm, 8 cm.

6. Construiți un triunghi cu două laturi de 8 cm şi 9 cm şi unghiul format de ele de 45°.

7. Construiți un triunghi cu o latură de 10 cm şi unghiurile alăturate ei de 30° şi 80°.

8. Calculați perimetrul unui triunghi:
a) isoscel cu o latură de 7 cm şi alta de 15 cm; b) echilateral cu linia mijlocie de 12 cm;
c) scalen ale cărui laturi au lungimile numere naturale consecutive pare, cea mai lungă fiind de 28 cm.

9. Calculați:
a) $31°40'29'' + 46°24'37''$; b) $118°27'35'' + 36°27'18''$;
c) $90° - 17°55'56''$; d) $142° - 72°34'56''$.

10. Punctele M, N, K, P sînt mijloacele laturilor patrulaterului $ABCD$. Aflați lungimile laturilor patrulaterului $MNKP$, dacă $AC = 20$ cm, $BD = 24$ cm.

11. Punctul M_1 este proiecția ortogonală a punctului $M\,(a, b)$ pe axa absciselor a unui sistem de axe ortogonale. Aflați coordonatele punctului M_1, dacă:
a) $a = 3,\ b = -\sqrt{8}$; b) $a = -0{,}4,\ b = 2\sqrt{5}$.

12. Punctul M aparține bisectoarei unghiului AOB. Aflați distanța de la punctul M la semidreapta $[OA$, dacă distanța de la punctul M la semidreapta $[OB$ este de:
a) $|\sqrt{7}-3|$ cm; b) $|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}|$ cm.

13. Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare AD. Punctele X și Y sînt mijloacele laturilor laterale ale trapezului. Aflați:
a) XY, dacă $AD = 18$ cm, $BC = 12$ cm; b) BC, dacă $AD = 20$ cm, $XY = 14$ cm.

14. Calculați măsurile unghiurilor exterioare ale unui triunghi:
a) dreptunghic cu un unghi de 40°; b) isoscel cu un unghi de 110°;
c) cu un unghi de 30° și altul de 80°.

15. Medianele AM și BN ale triunghiului ABC se intersectează în punctul P. Determinați:
a) PM și PN, dacă $AP = 24$ cm, $BP = 30$ cm;
b) AP și BP, dacă $PM = \sqrt{6}$ cm, $PN = \sqrt{7}$ cm.

16. Un unghi al paralelogramului are măsura de 55°. Aflați măsurile celorlalte unghiuri ale paralelogramului.

17. Un unghi al rombului are măsura cu 40° mai mare decît a altui unghi al acestui romb. Determinați măsurile unghiurilor rombului.

18. Aflați măsurile unghiurilor trapezului isoscel $ABCD$ cu baza mare AD, dacă:
a) $m(\angle A) + m(\angle D) = 150°$; b) $m(\angle B) + m(\angle C) = 210°$.

19. Aflați măsurile unghiurilor trapezului dreptunghic $ABCD$ cu baza mare AD, dacă:
a) $BA \perp AD$, $m(\angle A) + m(\angle D) = 150°$; b) $CD \perp AD$, $m(\angle B) + m(\angle C) = 200°$.

20. Între care șiruri de numere există o proporționalitate directă?
a) 1, 2, 3, 4 și 5, 6, 7, 8; b) 2, 3, 4, 5 și 4, 6, 8, 10;
c) $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$ și 5, 6, 7; d) $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{10}$ și 2,5; 2; 1.

21. Completați, astfel încît numerele din prima linie să fie direct proporționale cu numerele din linia a doua:

a)

4	6	10	12	
	18			27

b)

0,2		1,8		3,2	
	5	9	10		12

22. Aflați numărul total de diagonale ale unui poligon regulat:
a) cu 13 laturi; b) cu 15 laturi.

Formăm capacitățile și aplicăm

23. Calculați perimetrul unui triunghi echilateral cu linia mijlocie de $\frac{9}{\sqrt{3}}$ cm.

24. Aflați măsura unghiurilor formate la intersecția:
a) a două mediane ale triunghiului echilateral;
b) a trei înălțimi ale triunghiului echilateral.

25. Înălțimea unui triunghi echilateral cu laturile tangente la un cerc este cu 10 cm mai mare decît raza acestui cerc. Determinați înălțimea triunghiului.

26. Mediana unui triunghi echilateral cu laturile tangente la un cerc este cu 12 cm mai mare decît raza acestui cerc. Aflați mediana triunghiului.

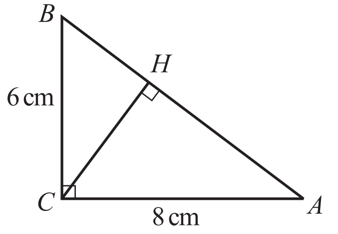
27. Pe prelungirea laturii AC a triunghiului echilateral ABC se ia punctul D, astfel încît $AC = CD$. Ştiind că $AB = 4\sqrt{3}$ cm, aflați:
a) unghiurile triunghiului BCD; b) BD.

28. Aflați lungimea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic cu vîrfurile pe un cerc, dacă raza acestui cerc este cu 17 cm mai mică decît lungimea ipotenuzei.

29. Dacă mărim cu 8 cm lățimea unui dreptunghi obținem un pătrat cu perimetrul de 96 cm. Aflați perimetrul dreptunghiului.

30. Aflați coordonatele celui de-al patrulea vîrf al paralelogramului $ABCD$, dacă:
a) $A\,(-2; 3)$, $B\,(6; 4)$, $C\,(5; -3)$; b) $A\,(1; 1)$, $B\,(-3; 3)$, $C\,(-2; -1)$.

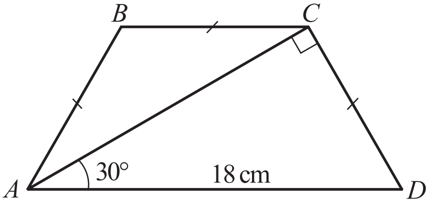
31. $[CM]$ şi $[CH]$ sînt respectiv o mediană şi o înălțime a triunghiului ABC cu $m(\angle C) = 90°$.
Aflați $\frac{BH}{AH}$ dacă $\frac{CM}{CH} = \frac{5}{4}$.



32. Examinați desenul. Aflați AB, AH, BH, CH.

33. Vîrfurile unui triunghi cu laturile de 6 cm, 8 cm şi 10 cm aparțin unui cerc. Aflați raza cercului.

34. Examinați desenul. Aflați AB şi AC.



35. Diagonala unui trapez isoscel înjumătățeşte unghiul obtuz al trapezului. Aflați lungimea bazei mari şi înălțimea trapezului dacă baza mică este de 3 cm, iar perimetrul trapezului este egal cu 42 cm.

36. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare AD. Aflați măsurile unghiurilor trapezului, dacă $[AC$ este bisectoarea unghiului BAD şi $AD = 2BC$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

37. Fie O punctul de intersecție al diagonalelor paralelogramului $ABCD$. Aflați AB şi BC, dacă perimetrul paralelogramului este egal cu 80 m, iar perimetrul triunghiului AOD este cu 10 m mai mare decît perimetrul triunghiului DOC.

38. Diagonala unui trapez isoscel împarte unghiul obtuz în jumătate. Aflați perimetrul trapezului dacă el este cu 18 cm mai mare decît lungimea bazei mari, iar linia mijlocie a trapezului este de 5 cm.

39. Laturile unui triunghi sînt tangente la un cerc. Aflați raza cercului dacă laturile triunghiului au lungimile egale cu 5 cm, 12 cm, 13 cm.

40. Fie ABC un triunghi isoscel cu $[AB] \equiv [BC]$. Punctele M şi N aparțin exteriorului triunghiului ABC, astfel încît triunghiurile ABM şi BCN sînt echilaterale. Demonstrați că $MN \parallel AC$.

41. Suma distanțelor de la vîrfurile triunghiului ABC la dreapta d este egală cu 30 cm. Aflați suma distanțelor de la mijloacele laturilor triunghiului ABC la dreapta d.

42. Punctul O aparține interiorului pătratului $ABCD$.
Demonstrați că dacă $m(\angle OCD) = m(\angle ODC) = 15°$, atunci triunghiul AOB este echilateral.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta I

1. a) Realizați un desen corespunzător situației: ΔACD, $m(\angle A)=90°$, $B\in[AC]$, $E\in[DC]$, $AB=BC=3$ cm, $CE=ED=5$ cm. **2p**

b) Aflați BE. **2p**

c) Completați: $\Delta ACD \sim$ ______ . **2p**

d) Aflați AD. **2p**

2. Un turist s-a pornit din punctul A şi a mers spre est 480 m pînă în punctul B, apoi spre sud 200 m şi a ajuns în punctul C.

a) La ce distanță de la punctul A se află turistul? **2p**

b) Determinați aria triunghiului ABC. **2p**

c) Aflați distanța dintre punctul B şi dreapta AC. **3p**

d) Cît timp va parcurge el distanța CA dacă se va mişca cu viteza de 5,4 km/h? **3p**

3. Aflați numărul total de diagonale ale unui poligon regulat cu 12 laturi. **3p**

4. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ cu $m(\angle A)=45°$. Baza mare a trapezului este de 8 cm, iar latura laterală cea mai lungă este de $4\sqrt{2}$ cm. Aflați perimetrul trapezului. **5p**

Varianta II

1. a) Realizați un desen corespunzător situației: ΔMNK, $m(\angle M)=90°$, $P\in[MN]$, $R\in[NK]$, $MN=2PN=8$ cm, $NK=2NR=10$ cm.

b) Aflați PR.

c) Completați: $\Delta PNR \sim$ ______ .

d) Aflați MK.

2. Un turist s-a pornit din punctul M şi a mers spre nord 600 m pînă în punctul N, apoi spre vest 450 m şi a ajuns în punctul K.

a) La ce distanță de la punctul M se află turistul?

b) Determinați aria triunghiului MNK.

c) Aflați distanța dintre punctul N şi dreapta MK.

d) Cît timp va parcurge el distanța KM dacă se va mişca cu viteza de 5,4 km/h?

3. Aflați numărul total de diagonale ale unui poligon regulat cu 14 laturi.

4. Fie trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mică BC de $2\sqrt{3}$ cm, înălțimea BK de 1 cm, $m(\angle A)=30°$. Aflați perimetrul trapezului.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	26–25	24–22	21–19	18–16	15–14	13–10	9–7	6–4	3–2	1–0

Capitolul 2

Cercul

§1. Recapitulare şi completări

1.1. Elementele cercului. Proprietăţi de bază

NE AMINTIM

1 Stabiliţi ce figură defineşte mulţimea:

a) punctelor egal depărtate de extremităţile unui segment dat;

b) punctelor situate la distanţa de 5 cm de un punct dat.

Definiţii

♦ Fie r un număr real pozitiv şi O un punct din plan. **Cercul de centru *O* şi rază *r*** este mulţimea punctelor din plan situate la distanţa r de punctul O (fig. 1).
Notăm: $\mathscr{C}(O, r)$.

♦ Fie $A \in \mathscr{C}(O, r)$. De asemenea, numim **rază** segmentul ce uneşte centrul cercului cu un punct al lui.

♦ Segmentul ale cărui extremităţi sînt puncte ale cercului se numeşte **coardă**. Coarda care conţine centrul cercului se numeşte **diametru** al cercului.

♦ Punctele A şi B se numesc **diametral opuse**, dacă $[AB]$ este diametru.

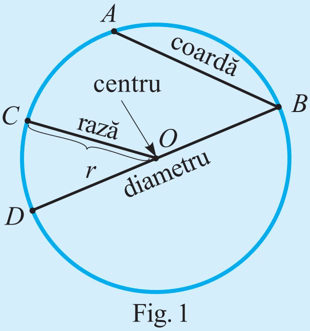


Fig. 1

• Amintiţi-vă definiţia figurilor congruente şi stabiliţi care dintre următoarele cercuri sînt congruente: $\mathscr{C}_1(A, r = 3 \text{ cm})$, $\mathscr{C}_2(B, r = 4 \text{ cm})$, $\mathscr{C}_3(A, r = 4 \text{ cm})$, $\mathscr{C}_4(B, r = 3 \text{ cm})$.

2 Examinaţi desenul (fig. 2, O este centrul cercului) şi numiţi punctele situate de centrul cercului la distanţa:

a) egală cu raza cercului;

b) mai mică decît raza cercului;

c) mai mare decît raza cercului.

Care dintre aceste puncte aparţin interiorului cercului?

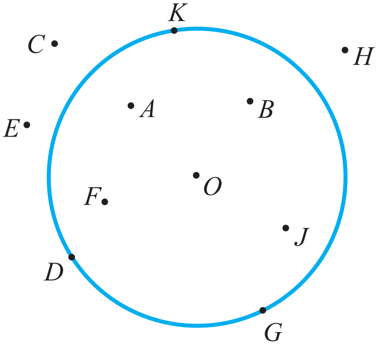


Fig. 2

Definiții

- Fie $\mathscr{C}(O,r)$. Mulțimea punctelor M din plan pentru care $OM < r$ se numește **interiorul cercului**. *Notăm*: Int $\mathscr{C}(O,r)$.
- Mulțimea punctelor N din plan pentru care $ON > r$ se numește **exteriorul cercului**. *Notăm*: Ext $\mathscr{C}(O,r)$.
- Reuniunea $\mathscr{C}(O,r)$ și a interiorului lui este **discul de centru *O* și rază *r***.
  Notăm: $\mathscr{D}(O,r)$.
  Prin urmare, $\mathscr{D}(O,r) = \mathscr{C}(O,r) \cup \text{ Int } \mathscr{C}(O,r) = \{M \mid OM \le r\}$.

3 *Examinați desenul (fig. 3) și demonstrați că **orice 3 puncte diferite ale unui cerc sînt necoliniare**.

Indicație. Demonstrați prin metoda reducerii la absurd că $C \notin AB$, unde A, B, C sînt trei puncte arbitrare diferite de pe cerc. Presupunînd că $C \in AB$, cercetați triunghiurile dreptunghice ODB și ODC.

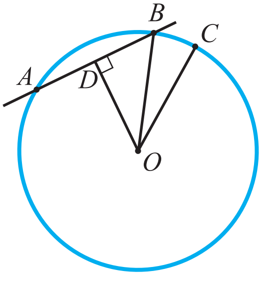


Fig. 3

• Cîte puncte comune, cel mult, pot avea o dreaptă și un cerc?

INVESTIGĂM

4 Examinați desenul (fig. 4, O este centrul cercului).
Ce se poate spune despre segmentul OM și triunghiul AOB, dacă: a) $OM \perp AB$;
b) M este mijlocul segmentului AB?
Trageți concluzia.

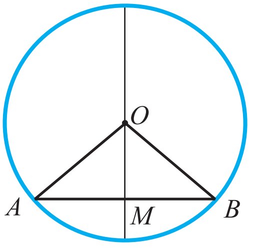


Fig. 4

Teorema 1

Dacă diametrul cercului conține mijlocul unei coarde, atunci el este perpendicular pe ea.

• Formulați reciproca teoremei 1, care de asemenea este teoremă.

• Demonstrați teorema 1 și reciproca ei.

Teorema 2

Dacă două coarde ale unui cerc sînt congruente, atunci ele sînt egal depărtate de centrul cercului.

*Să demonstrăm teorema 2.

Ipoteză: $\{A, B, C, D\} \subset \mathscr{C}(O,r)$, $[AB] \equiv [CD]$.

Concluzie: $\mathrm{d}(O, [AB]) = \mathrm{d}(O, [CD])$.

Demonstrație:

① $\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (Criteriul LLL). Fie M, N mijloacele segmentelor AB și respectiv CD (fig. 5).

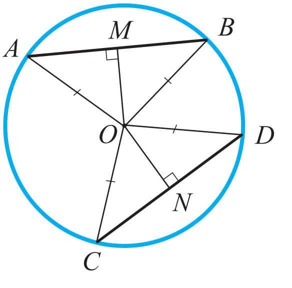


Fig. 5

* Opțional

② $[OM]$ şi $[ON]$ sînt mediane şi înălţimi ale triunghiurilor AOB şi respectiv COD. Conform ①, $[OM] \equiv [ON]$.

③ $d(O, [AB]) = OM = ON = d(O, [CD])$, c.c.t.d. ►

• Reciproca teoremei 2 de asemenea este teoremă.
Formulaţi şi demonstraţi reciproca teoremei 2.

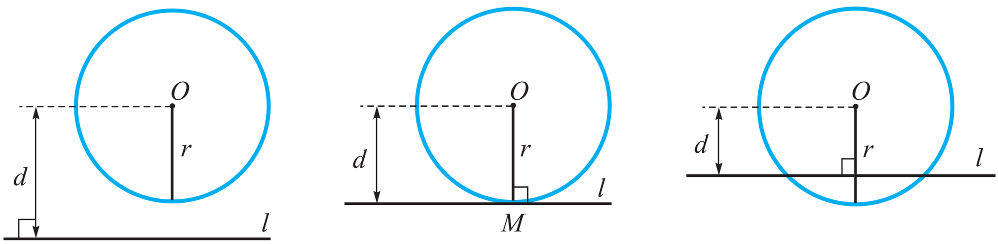
• Reformulaţi într-o singură teoremă de forma „*Ipoteza* dacă şi numai dacă *Concluzia*”:
a) teorema 1 şi reciproca ei; b) teorema 2 şi reciproca ei.

• Aplicînd teorema 1, explicaţi cum poate fi găsit centrul necunoscut al unui cerc dat.

1.2. Poziţiile relative ale unei drepte faţă de un cerc

NE AMINTIM

1 Examinaţi desenele (fig. 6, O este centrul cercului). Observaţi cum se numeşte dreapta l în fiecare caz.



dreaptă **exterioară** cercului | dreaptă **tangentă** la cerc; M – punct de tangenţă | dreaptă **secantă** la cerc

Fig. 6

• Fie d distanţa de la centrul cercului $\mathscr{C}(O,r)$ la dreapta l. Completaţi adecvat:

a) Dreapta l este ________ cercului $\mathscr{C}(O,r)$ dacă şi numai dacă $d > r$.

b) Dreapta l este tangentă la cerc dacă şi numai dacă ________.

c) Dreapta l este ________ dacă şi numai dacă $d <$ ____.

Teorema 3
Dacă o dreaptă este tangentă la un cerc, atunci ea este perpendiculară pe raza dusă în punctul de tangenţă.

*Să demonstrăm teorema 3.

Ipoteză: $\mathscr{C}(O,r) \cap l = \{M\}$.

Concluzie: $OM \perp l$.

Demonstraţie:

Aplicăm metoda reducerii la absurd.

① Presupunem contrariul: $OM \not\perp l$.

* Opţional

Fie că perpendiculara pe l construită din punctul O intersectează l în punctul A (fig. 7).

② Fie $B \in l$, astfel încît $[AB] \equiv [AM]$.

③ $\Delta OAB \equiv \Delta OAM$ (Criteriul CC).

④ Conform ③, $[OB] \equiv [OM]$, adică $[OB]$ este rază. Prin urmare, $B \in \mathscr{C}(O, r)$.

Am obținut că dreapta l are două puncte comune (M şi B) cu cercul – contradicție.

Deci, presupunerea $OM \not\perp l$ este greşită, adică $OM \perp l$. ►

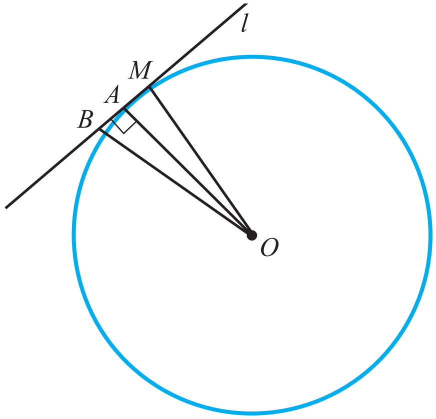
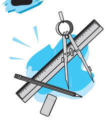


Fig. 7

Reciproca teoremei 3 de asemenea este teoremă.

• Formulați şi demonstrați reciproca teoremei 3.

2 Problemă de construcție (opțional)



Fie M un punct al cercului $\mathscr{C}(O, r)$ (fig. 8).
Să construim o dreaptă tangentă la cerc, astfel încît M să fie punctul de tangență.

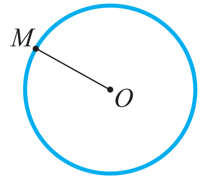


Fig. 8

Rezolvare:

① Construim raza OM (fig. 9).

② Construim perpendiculara AB pe dreapta OM:
- construim $O_1 \in OM$, astfel încît $[O_1M] \equiv [OM]$;
- construim $\mathscr{C}_1(O, r_1)$ şi $\mathscr{C}_2(O_1, r_1)$, unde $r_1 > r$;
- $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2 = \{A, B\}$.

③ Conform reciprocei teoremei 3, deoarece $AB \perp OM$ şi $M \in \mathscr{C}(O, r)$, rezultă că AB este tangentă la cerc în punctul M.

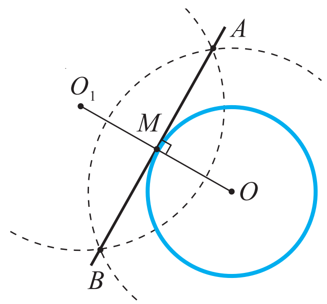


Fig. 9

Prin orice punct al cercului se poate construi o unică dreaptă tangentă la cerc în acest punct.

Problemă. Examinați desenul (fig. 10) şi demonstrați că:
a) $[AM] \equiv [BM]$;
b) $[MO$ este bisectoarea unghiului AMB.

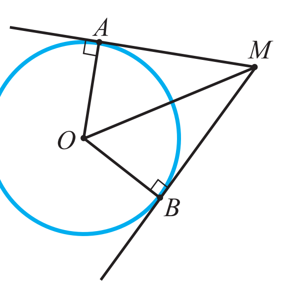


Fig. 10

• Două tangente la acelaşi cerc, duse dintr-un punct exterior cercului, determină cu punctele de tangență două segmente congruente.

• Semidreapta cu originea într-un punct exterior şi care conține centrul cercului este bisectoarea unghiului format de tangentele din acest punct la cerc.

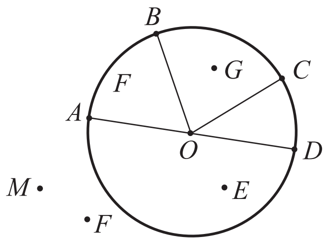
Exerciții și probleme

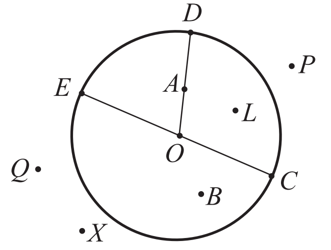
Fixăm cunoștințele

1. Construiți şi notați un cerc:

a) de centru A şi rază 4 cm; b) de centru B şi rază 6 cm.

2. Examinați desenul (O este centrul cercului) şi numiți: razele; coardele; diametrele; punctele interioare cercului; punctele exterioare cercului; punctele diametral opuse.

a) 

b) 

3. Stabiliți poziția punctului A față de $\mathscr{C}(O, r=6\,\text{cm})$, dacă distanța de la A la O este de:

a) 6 cm; b) $3\sqrt{5}$ cm; c) 6,(6) cm; d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})$ cm.

4. Coardele AB şi CD ale unui cerc sînt situate la aceeaşi distanță de la centrul cercului. Aflați AB, dacă:

a) $CD=8$ cm; b) $AB+CD=14$ cm; c) $AB+2CD=6\sqrt{10}$ cm; d) $5AB+CD=12$ cm.

5. Diametrul AB intersectează coarda MN a aceluiaşi cerc de rază R sub un unghi drept în punctul E. Aflați distanța de la centrul cercului la MN, dacă:

a) $ME=9$ cm, $R=15$ cm; b) $ME=12$ cm, $R=13$ cm; c) $4NE=2R-2$ cm $=32$ cm.

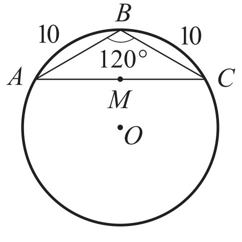
6. Fie d distanța dintre dreapta l şi centrul cercului $\mathscr{C}(O, r)$. Determinați poziția dreptei l față de cerc, dacă:

a) $d=3$ cm, $r=4$ cm; b) $d=6{,}3$ cm, $r=3\sqrt{5}$ cm;

c) $d=r=2{,}7$ cm; d) $d=0$ cm, $r=\frac{4}{9}$ cm;

e) $d=\sqrt{3-\sqrt{5}}$ cm, $r=\dfrac{2}{3-\sqrt{5}}$ cm.

7. Aflați raza cercului şi lungimea segmentelor AC şi BM din desen, unde M este mijlocul segmentului AC.



8. Din punctul M exterior cercului au fost duse tangentele la cerc. Fie A şi B punctele de tangență. Aflați BM, dacă:

a) $AM=13{,}7$ cm;

b) $AM-2BM=-3{,}(4)$ cm;

c) $AB=8$ cm, $m(\angle AMB)=60°$.

9. Mediatoarea segmentului nenul AB trece prin centrul cercului $\mathscr{C}(O, r)$. Stabiliți poziția dreptei AB față de cerc, dacă:

a) $OA=5$ cm, $r=6$ cm; b) $OA=r=\frac{3}{4}$ cm;

c) $OA=14$ cm, $r=12\frac{1}{5}$ cm şi $AB=12$ cm; d) $OA=15$ cm, $r=12$ cm şi $AB=18$ cm.

10. Fie $\mathscr{C}(O, r)$. Aflați distanța de la centrul cercului la coarda AB, dacă:
a) $AB = 8$ cm, $r = 5$ cm; b) $AB = 24$ cm, $r = 13$ cm; c) $AB = a$, $r = b$.

11. Fie $[AB]$ o coardă a cercului $\mathscr{C}(O, r)$, iar d – distanța de la centrul cercului pînă la această coardă. Determinați r, dacă:
a) $AB = 12$ cm, $d = 8$ cm; b) $AB = d = \sqrt{3}$ cm.

12. Care este măsura unghiului format de tangentele la un cerc, duse dintr-un punct aflat la o distanță de cerc egală cu raza cercului?

13. Construiți un cerc, știind că orice coardă a lui are cel mult 10 cm.

14. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r = 8$ cm$)$ și AB o coardă a lui. Folosind doar echerul, construiți mijlocul lui $[AB]$.

15. Distanța dintre centrul O al cercului și o coardă AB este de două ori mai mică decît raza. Determinați $m(\angle ABO)$.

16. Într-un cerc, la distanța de 6 cm de centru, este dusă o coardă de $12\sqrt{3}$ cm. Aflați raza cercului.

17. Stabiliți poziția punctului M față de $\mathscr{C}(O, r)$ dacă:
a) $OM = \frac{1}{2} r$; b) $OM = |2 - \sqrt{5}|\, r$; c) $OM = \frac{2}{r}$.

Formăm capacitățile și aplicăm

18. Din punctul A, aflat la distanța de 29 cm de la centrul cercului $\mathscr{C}(O, r)$, a fost dusă tangenta AB la cerc (B este punctul de tangență). Determinați raza cercului, dacă $AB = 21$ cm.

19. Fie $A \in \text{Ext}\,\mathscr{C}(O, r = 5$ cm$)$ și $C \in \mathscr{C}(O, r)$, astfel încît AC este tangentă la cerc. Aflați OA, dacă $m(\angle OAC) = 30°$.

20. Fie $M \in \text{Ext}\,\mathscr{C}(O, r = 3{,}5$ cm$)$ și $A \in \mathscr{C}(O, r)$, astfel încît AM este tangentă la cerc. Aflați OM, dacă $m(\angle AMO) = 30°$.

21. Fie $M \in \text{Ext}\,\mathscr{C}(O, r)$ și $A \in \mathscr{C}(O, r)$, astfel încît AM este tangentă la cerc. Aflați raza cercului, dacă $m(\angle AMO) = 45°$ și $AM = 7{,}5$ cm.

22. Fie $M \in \text{Ext}\,\mathscr{C}(O, r = \sqrt{15}$ cm$)$ și $A \in \mathscr{C}(O, r)$, astfel încît AM este tangentă la cerc. Fie N mijlocul segmentului OM. Determinați AN, dacă $m(\angle AOM) = 60°$.

23. ***Matematica în viață.*** Mihai a construit un cerc și a șters centrul. Cum construim centrul cu ajutorul riglei și compasului?
Indicație. Folosiți teorema 1 (pag. 142) și proprietatea mediatoarei unui segment.

24. Fie AM tangenta la $\mathscr{C}(O, R)$ în punctul A. Aflați distanța de la punctul O la punctul M, dacă:
a) $AM = 0{,}8$, $r = 0{,}6$; b) $AM = 24$, $r = 18$; c) $AM = x$, $r = y$.

25. Demonstrați că mijloacele coardelor de aceeași lungime ale unui cerc sînt puncte conciclice (aparțin aceluiași cerc).
Indicație. Utilizați teorema 2 (pag. 142).

26. Cercurile $\mathscr{C}(O, r)$ şi $\mathscr{C}(O_1, r)$ se intersectează în punctele M şi N. Aflaţi OO_1, dacă $MO = 13$ cm, $MO_1 = 6$ cm, $MN = 10$ cm.
Indicaţie. Pentru a construi $[AB]$ folosiţi teorema înălţimii şi relaţia $(\sqrt{15})^2 = 3 \cdot 5$.

27. Construiţi un cerc de rază r ce trece prin punctele A şi B date, dacă:
a) $AB = 5$ cm, $r = 6$ cm;
b) $AB = \sqrt{15}$ cm, $r = 5$ cm. *Indicaţie*. Pentru a construi $[AB]$ folosiţi teorema înălţimii şi relaţia $(\sqrt{15})^2 = 3 \cdot 5$.

28. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r = 8\,\text{cm})$. Construiţi un triunghi ABC înscris în acest cerc, astfel încît $AB = 2BC = 10$ cm.

29. Utilizînd doar rigla şi compasul, construiţi un unghi de:
a) $45°$; b) $22°30'$; c) $157°30'$.

Dezvoltăm capacităţile şi creăm

30. $\mathscr{C}(O_1, R)$ şi $\mathscr{C}(O_2, r)$ sînt exterioare, adică $O_1O_2 > R + r$. Dreapta l este tangentă ambelor cercuri în punctele A şi respectiv B. Calculaţi O_1O_2, dacă $m(\angle AO_1O_2) = 60°$, $R = 15$ cm, $r = 5$ cm. Cercetaţi toate cazurile posibile.

31. Într-un triunghi dreptunghic un punct de tangenţă al cercului înscris în acest triunghi împarte ipotenuza în segmente cu lungimea de 5 cm şi 12 cm. Aflaţi lungimile catetelor triunghiului.

32. Într-un cerc cu raza de 25 cm sînt duse, de aceeaşi parte a centrului, două coarde paralele, cu lungimile de 40 cm şi 30 cm. Determinaţi distanţa dintre aceste coarde.

33. Fie dreapta l şi punctele M şi N. Construiţi un cerc care conţine punctele M şi N şi al cărui centru aparţine dreptei l. În ce situaţie problema:
a) are o singură soluţie;
b) are o infinitate de soluţii;
c) nu are nicio soluţie?

34. Fie cercul $\mathscr{C}(O, r)$ şi punctul M exterior cercului. Construiţi prin M o dreaptă care taie cercul după o coardă de lungime x, unde:
a) $r = 10$ cm, $MO = 15$ cm, $x = 8$ cm;
b) $r = 8$ cm, $MO = 12$ cm, $x = 10$ cm.
Indicaţie. Utilizaţi teorema: *Două coarde ale unui cerc sînt congruente dacă şi numai dacă sînt egal depărtate de centrul cercului.*

Matematică distractivă

35. Împărţiţi cu ajutorul a doar trei tăieturi rectilinii un disc în:
a) 4 părţi; b) 5 părţi; c) 6 părţi; d) 7 părţi.

36. Dintr-un punct al cercului este coborîtă o perpendiculară pe o rază a lui, astfel încît această rază este împărţită în două segmente proporţionale cu 8 şi 9, considerînd de la centru. Aflaţi lungimea perpendicularei, dacă raza cercului este de 68 cm.

§2. Unghiuri înscrise în cerc

2.1. Unghi la centru. Arce de cerc

NE AMINTIM

1 Care este măsura unghiului descris de minutarul unui ceas timp de 10 min?

Definiții

- Un unghi cu vîrful în centrul unui cerc se numeşte **unghi la centru**.
- Intersecția cercului cu interiorul unghiului la centru se numeşte **arc mic** al cercului. *Notăm*: $\smile AB$, unde A şi B sînt punctele de intersecție a unghiului la centru cu cercul.
- Intersecția cercului cu exteriorul unghiului la centru se numeşte **arc mare** al cercului. *Notăm*: $\smile ACB$, unde C aparține cercului, dar nu aparține arcului mic.
- Punctele A şi B se numesc **capetele arcelor**. Arcele AB şi ACB se numesc **arce complementare**.
  În afară de faptul că punctele A şi B determină două arce, ele mai determină coarda AB. Se spune „coarda AB subîntinde arcul AB".

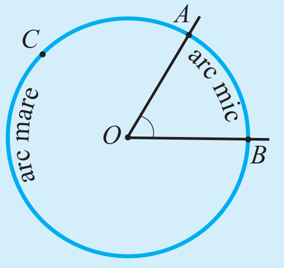


Fig. 12

- **Măsura unui arc mic** este măsura unghiului la centru corespunzător arcului.
- **Măsura unui arc mare** este egală cu 360° minus măsura arcului complementar lui.
- Două **arce** ale aceluiaşi cerc (sau a două cercuri congruente) sînt **congruente** dacă au măsuri egale. Notația $\smile AB \equiv \smile CD$ se citeşte: arcele AB şi CD sînt congruente.
- Capetele unui diametru determină două arce congruente, numite **semicercuri**, fiecare cu măsura de 180°.

INVESTIGĂM

2 Examinați desenul (fig. 13, O este centrul cercului). Utilizînd datele din desen şi luînd în considerație că $\angle AOB \equiv \angle COD$ şi $[AG] \equiv [EF]$, determinați:

a) CD;

b) $m(\angle FOE)$.

Rezolvare:

$\Delta AOB \equiv \Delta COD$ (Criteriul LUL).

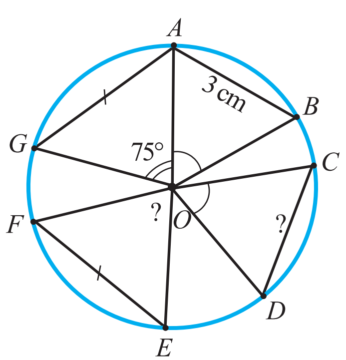


Fig. 13

Prin urmare, $CD =$ ___ cm.

$\Delta AOG \equiv$ ___ (Criteriul LLL).

$m(\angle FOE) = m(\angle$ ___ $) =$ ___ °.

Răspuns: $CD =$ ___ cm, $m(\angle FOE) =$ ___ °.

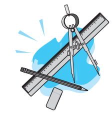
Teorema 4

Dacă două coarde ale aceluiaşi cerc (sau a două cercuri congruente) sînt congruente, atunci arcele pe care le subîntind sînt congruente.

Reciproca teoremei 4 de asemenea este teoremă.

• Demonstraţi teorema 4 şi reciproca ei.

3 Problemă de construcţie (opţional)



Cum se poate construi un cerc, ştiind că o coardă de 3 cm subîntinde în acest cerc un arc de 70°?

Rezolvare:

① Pentru a construi cercul, trebuie să construim un segment de lungimea razei (fig. 14).

② Considerăm construcţia realizată (vezi desenul).

③ Fie $[OM]$ înălţime a triunghiului isoscel AOB.

ΔOMB este dreptunghic, $m(\angle B) = 55°$,

$BM = 1{,}5$ cm.

Prin urmare, conform criteriului CU, triunghiul OMB (în particular, ipotenuza OB) poate fi construit în mod univoc.

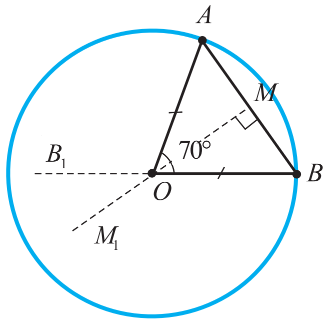


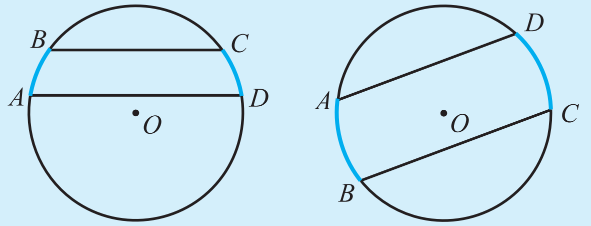
Fig. 14

④ Construcţia poate fi realizată în modul următor:
- construim segmentul AB de 3 cm;
- construim mediatoarea MM_1 a segmentului AB, unde M este mijlocul segmentului AB;
- construim $[BB_1$, astfel încît $m(\angle MBB_1) = 55°$;
- $[MM_1 \cap [BB_1 = \{O\}$;
- construim cercul $\mathscr{C}(O, OB)$.

• Utilizînd proprietăţile triunghiurilor şi ale unghiurilor obţinute la intersecţia a două drepte paralele de o secantă poate fi demonstrată:

Teorema 5

Două arce ale aceluiaşi cerc cuprinse între două coarde paralele sînt congruente (fig. 15).



$AD \parallel BC \Rightarrow \smile AB \equiv \smile CD$

Fig. 15

2.2. Unghiuri înscrise în cerc

INVESTIGĂM

• Examinați desenele (fig. 16) şi aflați $m(\angle ABC)$.

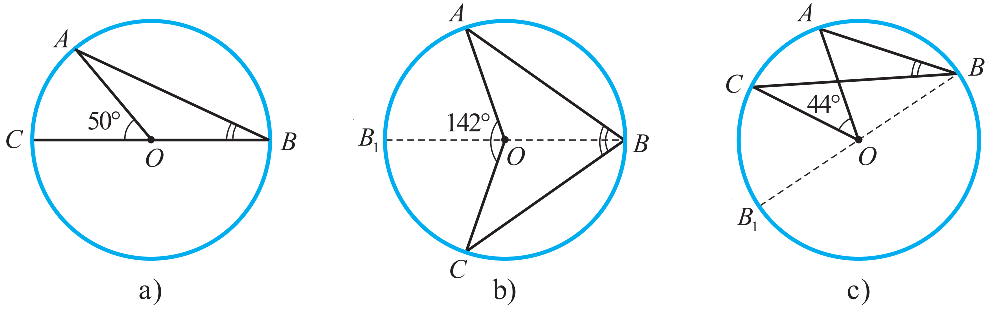


Fig. 16

Rezolvare:

a) Examinăm ΔAOB: $[AO]\equiv[OB]$, deci $\angle B \equiv \angle A$.

$\angle AOC$ este unghi exterior pentru $\angle AOB$, deci $m(\angle AOC) = m(\angle A) + m(\angle B)$.

$m(\angle B) = \frac{1}{2} m(\angle \square) = \square°$.

b) Ca şi în cazul a) $m(\angle ABB_1) = \frac{1}{2} m(\angle AOB_1)$, (1)

$m(\angle B_1BC) = \frac{1}{2} m(\angle \square)$. (2)

Adunînd relațiile (1) şi (2), obținem

$$m(\angle ABB_1) + m(\angle B_1BC) = m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle \square) = \square°.$$

c) Similar cazurilor a) şi b), obținem:

$$m(\angle ABC) = \frac{1}{2} m(\angle \square) = \square°.$$

Teorema 6

Măsura unui unghi înscris în cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile unghiului (fig. 17).

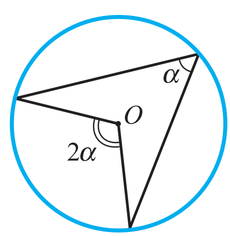


Fig. 17

Consecința 1
Unghiurile înscrise în același arc de cerc sînt congruente (fig. 18).

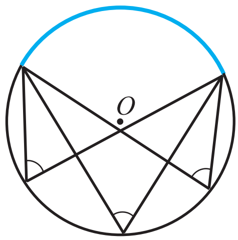


Fig. 18

Consecința 2
Unghiurile înscrise într-un semicerc sînt drepte (fig. 19).

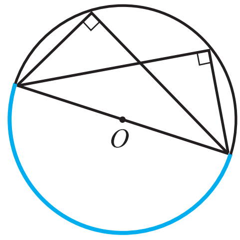


Fig. 19

Exercițiu. Desenul din figura 20 sugerează un algoritm de construire a tangentelor la un cerc de centru O dintr-un punct M dat, exterior cercului. Luînd în considerație consecința 2, explicați acest algoritm.

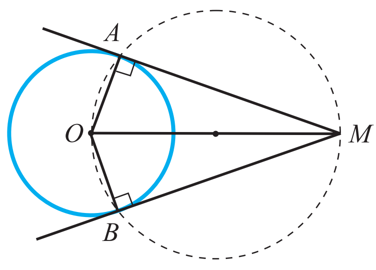


Fig. 20

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Desenați și notați un unghi la centru de măsură α al cercului $\mathscr{C}(O, r)$, unde:

a) $\alpha = 60°$, $r = 4$ cm; b) $\alpha = 90°$, $r = 6$ cm; c) $\alpha = 120°$, $r = \sqrt{5}$ cm.

2. Punctele A, B, C aparțin unui cerc și $B \in \smile AC$.

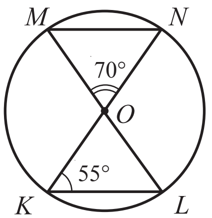
a) Aflați $m(\smile BC)$, dacă $m(\smile AC) = 120°$, $m(\smile AB) = 75°$.

b) Aflați $m(\smile AC)$, dacă $m(\smile AB) = 35°$, $m(\smile BC) = 55°$.

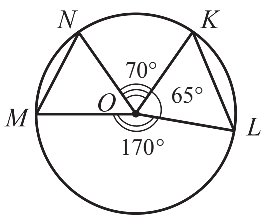
c) Aflați $m(\smile AB)$, dacă $m(\smile AC) = 150°$, $m(\smile AC) + m(\smile BC) = 175°$.

3. Comparați MN și KL din următoarele figuri (O este centrul cercului):

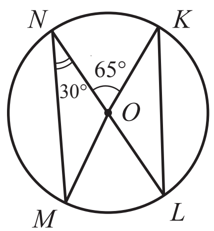
a)



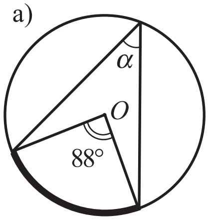
b)

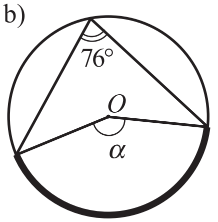


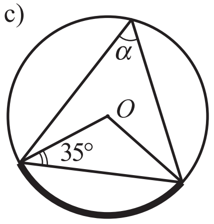
c)

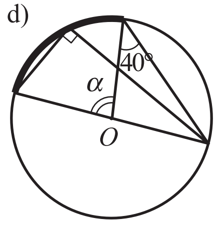


4. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):

a)


b)


c)


d)


5. Cîte grade are unghiul la centru corespunzător arcului:

a) de $\frac{1}{3}$ din cerc; b) $\frac{1}{5}$ din cerc; c) $\frac{1}{10}$ din cerc;

d) $\frac{1}{12}$ din cerc; e) $\frac{1}{6}$ din semicerc; f) $\frac{1}{12}$ din semicerc?

6. Construiți unghiul ABC format de secanta AC şi tangenta AB ale aceluiaşi cerc, astfel încît:

a) $m(\angle ABC) = 40°$; b) $m(\angle ABC) = 75°$; c) $m(\angle ABC) = 350°$.

7. Construiți unghiul ABC cu vîrful B în interiorul cercului, astfel încît:

a) $m(\angle ABC) = 25°$; b) $m(\angle ABC) = 115°$; c) $m(\angle ABC) = 210°$.

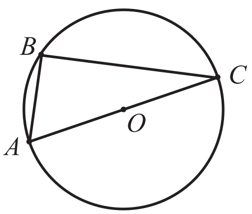
8. Construiți unghiul ABC cu vîrful B în exteriorul cercului, astfel încît:

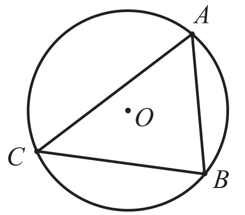
a) $m(\angle ABC) = 70°$; b) $m(\angle ABC) = 127°$; c) $m(\angle ABC) = 165°$.

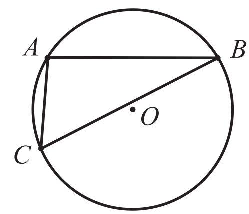
9. Aflați diametrul cercului în care este înscris triunghiul ABC cu unghiul drept B şi:

a) $AC = 8\,\text{cm}$, $BC = 4\,\text{cm}$; b) $AB = 20\,\text{cm}$, $BC = 21\,\text{cm}$.

10. Fără a măsura, stabiliți tipul (ascuțitunghic, dreptunghic, optuzunghic) triunghiului ABC (O este centrul cercului) din desen.

a)


b)


c)


11. Punctele A, B, C, D sînt situate, în această ordine, pe un cerc. $[AC]$ şi $[BD]$ sînt diametre perpendiculare. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$.

12. Punctele A, B, C, D sînt situate, în această ordine, pe un cerc. $[AC]$ şi $[BD]$ sînt diametre neperpendiculare. Determinați tipul patrulaterului $ABCD$.

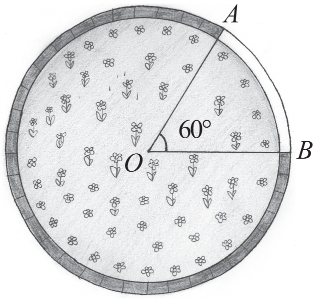
13. Punctele A, B, C, D sînt situate, în această ordine, pe un cerc de centru O şi $AB \parallel CD$. Aflați:

a) $m(\angle AOD)$, dacă $m(\angle BOC) = 50°$;

b) $m(\angle BOC)$, dacă $m(\angle DAO) = 70°$;

c) $m(\angle ADO)$, dacă $m(\angle BCO) = 65°$.

14. Domnul Albu a vopsit o porțiune din bordura ce împrejmuieşte un răzor de flori în 10 minute (vezi desenul). În cîte minute va reuşi să vopsească porțiunea rămasă a bordurii?



15. Fie ABC un unghi format de secanta AB şi tangenta AC (A este punctul de tangență) la un cerc de centru O. Aflați $m(\angle BAC)$, dacă $m(\angle AOB) = 80°$.

■■ Formăm capacitățile și aplicăm

16. Punctele A, B, C, D, E sînt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați măsurile arcelor AB, BC, CD, DEA, dacă ele sînt direct proporționale cu numerele 3, 4, 2, 3.

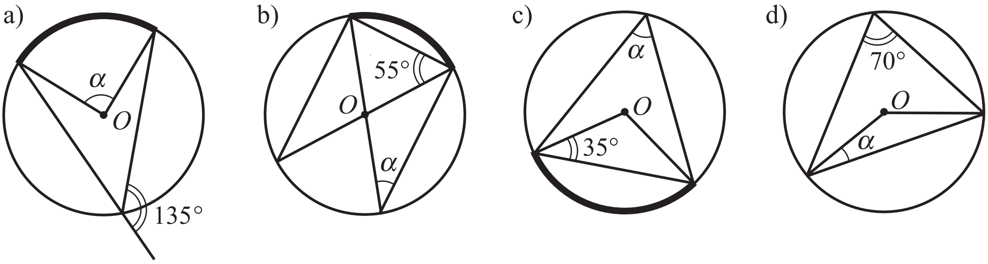
17. Punctele A, B, C, D, E sînt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați măsurile arcelor AB, BC, CD, DEA, dacă ele sînt invers proporționale cu numerele 1, 2, 3, 6.

18. Dintr-un punct al cercului sînt duse două coarde perpendiculare cu lungimile de 35 cm şi 12 cm. Determinați raza cercului.

19. Cîte arce şi cîte coarde există cu capetele:
a) în 3 puncte ale unui cerc; b) în 7 puncte ale unui cerc; c) în n puncte ale unui cerc?

20. Împărțiți un cerc în şase arce, astfel încît măsurile lor să fie proporționale cu numerele 1, 3, 6, 7, 8, 11.

21. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):



22. Care este măsura arcului descris de minutarul unui ceas la un interval de:
a) 20 de minute; b) 25 de minute; c) 4 minute; d) 35 de minute?

23. Punctele A şi B aparțin unui cerc, astfel încît $m(\smile AB) = 120°$. Aflați raza cercului, dacă $AB = 6\sqrt{3}$ cm.

24. Coardele AB şi AC ale unui cerc sînt congruente şi au fiecare lungimea de 16 cm. Aflați raza cercului, dacă $m(\smile BC) = 120°$.

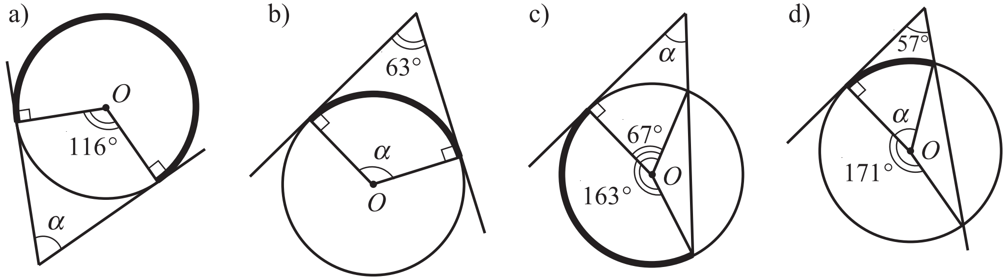
25. Fie AB o coardă a unui cerc. Prin punctul A se duce tangenta AC la cerc, iar prin punctul B – o coardă BD. Determinați $m(\angle BAC)$, dacă $m(\angle BDA) = 80°$.

■■■ Dezvoltăm capacitățile și creăm

26. Laturile unui unghi cu măsura de 60° sînt tangente la un cerc de rază 20 cm. Aflați distanța dintre punctele de tangență.

27. Laturile unui triunghi dreptunghic sînt tangente la un cerc. Unul dintre punctele de tangență împarte o catetă în segmente de lungimi de 3 cm şi 5 cm. Determinați lungimea ipotenuzei.

28. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):



29. Folosind rigla şi compasul, construiți un arc de:
a) $60°$; b) $30°$; c) $120°$; d) $15°$.

30. Se cunoaşte un unghi de $19°$. Construiți (doar cu rigla şi compasul) un unghi de:
a) $9°$. *Indicație.* $180° = 19° \cdot 9 + 9°$. b) $5°$; c) $1°$.

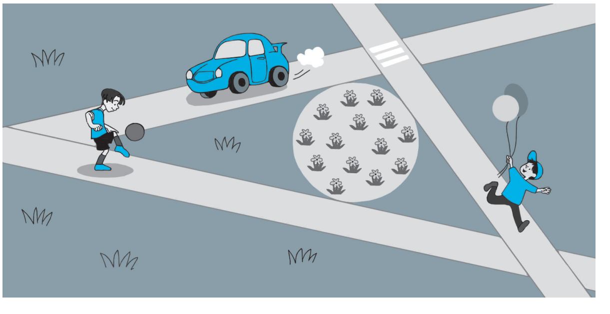
31. Se dă un unghi de $25°$. Construiți, folosind rigla şi compasul, un unghi de:
a) $10°$. *Indicație.* $100° = 25° \cdot 4 = 90° + 10°$. b) $5°$; c) $20°$.

32. Fie $\mathscr{C}(O, r = 4 \text{ cm})$ şi punctul A exterior lui. Construiți tangentele AM şi AN ale cercului.

33. O coardă a unui cerc are lungimea de 30 cm. Printr-o extremitate a acestei coarde este dusă o tangentă la cerc, iar prin cealaltă extremitate este dusă o coardă cu lungimea de 36 cm, paralelă cu tangenta. Aflați raza cercului.

34. Într-un cerc de rază 2 cm este construită o coardă de 1 cm. Printr-o extremitate a acestei coarde este dusă o tangentă la cerc, iar prin cealaltă extremitate este dusă o coardă paralelă cu tangenta. Determinați lungimea acestei coarde.

§3. Cercuri înscrise. Cercuri circumscrise



3.1. Cercuri înscrise

INVESTIGĂM

1 Cum poate fi construit un punct M pe latura AB a triunghiului ABC, egal depărtat de celelalte două laturi (fig. 21)?

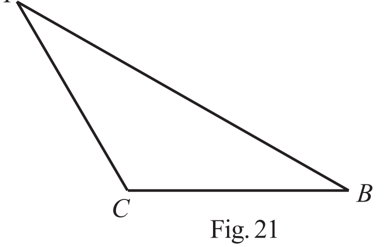


Fig. 21

Rezolvare:

① Mulțimea punctelor egal depărtate de semidreptele $[CA$ şi $[CB$ este bisectoarea unghiului C. Prin urmare, $\{M\} = [AB] \cap [CC_1$, unde $[CC_1$ este bisectoarea unghiului C.

② Construcția bisectoarei unghiului C se realizează astfel (fig. 22):

- construim $\mathscr{C}(C,r)$, $[AC]\cap\mathscr{C}(C,r)=\{O_1\}$,
$[BC]\cap\mathscr{C}(C,r)=\{O_2\}$;
- construim $\mathscr{C}_1(O_1,r_1)$, $\mathscr{C}_2(O_2,r_1)$, unde $r_1>\frac{O_1O_2}{2}$.
$\mathscr{C}_1(O_1,r_1)\cap\mathscr{C}_2(O_2,r_1)=\{C_1,C_2\}$,
unde C_1 aparține interiorului unghiului C.
- $[CC_1$ este bisectoarea unghiului C.

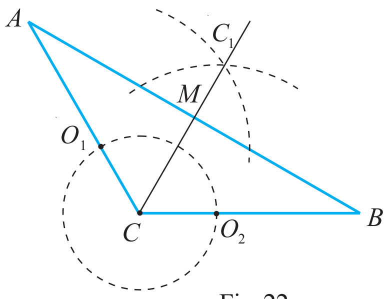


Fig. 22

Proprietatea bisectoarei
Orice punct al bisectoarei unui unghi este egal depărtat de laturile acestuia.

Exerciții. **1.** Explicați cum se construiește în interiorul unui triunghi un punct egal depărtat de laturile triunghiului. Prin ce mai este semnificativ acest punct?

2. Examinați desenul (fig. 23) și explicați de ce în interiorul patrulaterului $ABCD$ nu se poate construi un punct egal depărtat de laturile patrulaterului.

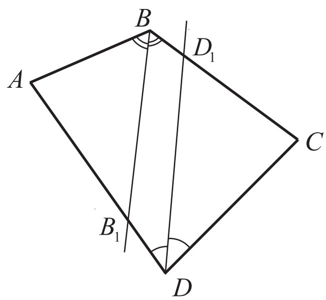


Fig. 23

Definiții

- Un **cerc** se numește **înscris într-un poligon convex** dacă laturile poligonului sînt tangente la acest cerc. În acest caz, poligonul se numește **poligon circumscris cercului** (fig. 24).
- Dacă într-un poligon convex poate fi înscris un cerc, atunci poligonul se numește **poligon circumscriptibil**.

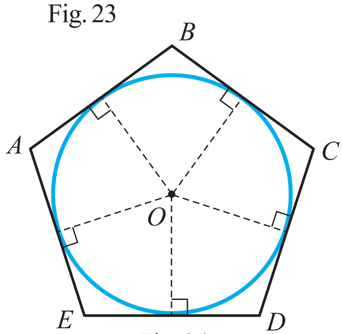


Fig. 24

Observație. Centrul cercului înscris într-un poligon este egal depărtat de laturile poligonului.

• Aplicînd proprietatea bisectoarei unui unghi, demonstrați următoarea teoremă.

Teorema 7

În orice triunghi poate fi înscris un cerc. Centrul acestui cerc este punctul de intersecție a bisectoarelor triunghiului (fig. 25).

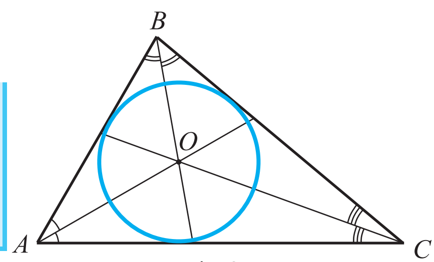


Fig. 25

2 În patrulaterul $ABCD$ este înscris un cerc. Utilizînd datele din figura 26, aflați DC.

Rezolvare:

Fie T_1, T_2, T_3, T_4 punctele de tangență (fig. 27), unde $T_1 \in [AB]$, $T_2 \in [BC]$, $T_3 \in [CD]$, $T_4 \in [AD]$.

Conform proprietății tangentelor duse din același punct exterior cercului:

$[AT_1] \equiv [AT_4]$, $[BT_1] \equiv [BT_2]$, $[CT_2] \equiv \square$, $\square \equiv [DT_4]$.

Prin urmare, $AB + DC =$

$= AT_1 + T_1B + CT_3 + T_3D_4 = AT_4 + BT_2 + CT_2 + \square =$

$= (AT_4 + \square) + (BT_2 + CT_2) = \square + BC. \quad (*)$

Din $(*)$ rezultă că $DC = \square + BC - AB$.

$DC = \square$ cm $+ 9\text{ cm} - 10\text{ cm} = \square$ cm.

Răspuns: $\square$ cm.

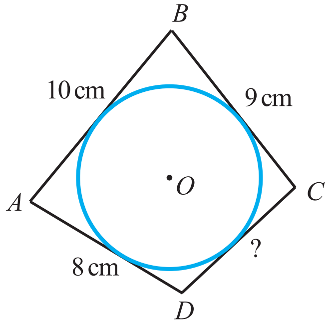


Fig. 26

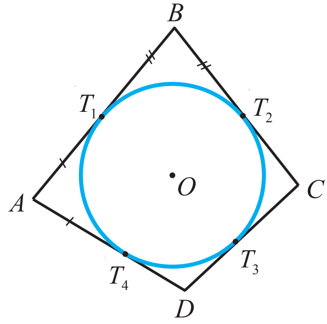


Fig. 27

Teorema 8

Dacă sumele lungimilor laturilor opuse ale unui patrulater convex sînt egale, atunci în acest patrulater poate fi înscris un cerc.

• Formulați și demonstrați reciproca teoremei 8, care de asemenea este teoremă.

3.2. Cercuri circumscrise

INVESTIGĂM

1 Care dintre următoarele poligoane pot fi construite într-un cerc dat, astfel încît vîrfurile poligonului să aparțină cercului:

a) triunghi isoscel;
b) triunghi echilateral;
c) triunghi scalen;
d) pătrat;
e) dreptunghi;
f) romb arbitrar;
g) trapez arbitrar;
h) trapez isoscel?

Definiții

- Un **cerc** se numește **circumscris unui poligon convex** dacă vîrfurile poligonului aparțin cercului. În acest caz, poligonul se numește **poligon înscris în cerc** (fig. 28).
- Dacă unui poligon i se poate circumscrie un cerc, atunci poligonul se numește **poligon inscriptibil**.

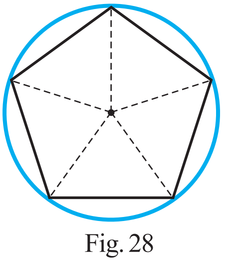


Fig. 28

Observație. Centrul cercului circumscris unui poligon este egal depărtat de vîrfurile poligonului.

Proprietatea mediatoarei
Punctele mediatoarei unui segment sînt egal depărtate de capetele segmentului.

• Aplicînd proprietatea punctelor mediatoarei unui segment, demonstrați următoarea teoremă.

Teorema 9
Oricărui triunghi i se poate circumscrie un cerc. Centrul acestui cerc este punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului (fig. 29).

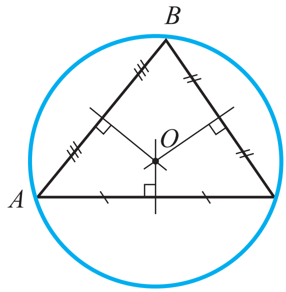


Fig. 29

Problemă. Depinde oare de tipul triunghiului poziția față de triunghi a centrului cercului circumscris acestui triunghi?

2 Examinați desenul (fig. 30) și aflați măsurile unghiurilor B și C.

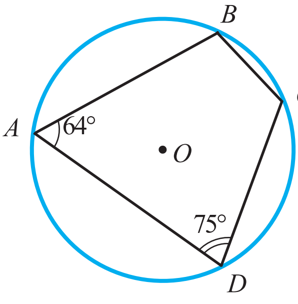


Fig. 30

Rezolvare:

① Cercetăm arcele $\smile BD$ și $\smile BAD$:
$m(\smile BAD) = 360° - m(\smile BD)$, deoarece $\smile BAD$ este arc mare complementar arcului mic $\smile BD$.

② $m(\smile BD) = 2m(\angle A)$, deoarece $\smile BD$ este cuprins între laturile unghiului A.
$m(\smile BD) = 2 \cdot 64° = 128°$.

③ $m(\smile BAD) \overset{①}{=} 360° - \square° = \square°$. $m(\angle C) = \frac{1}{2} m(\smile BAD) = \square° = 180° - 64°$.

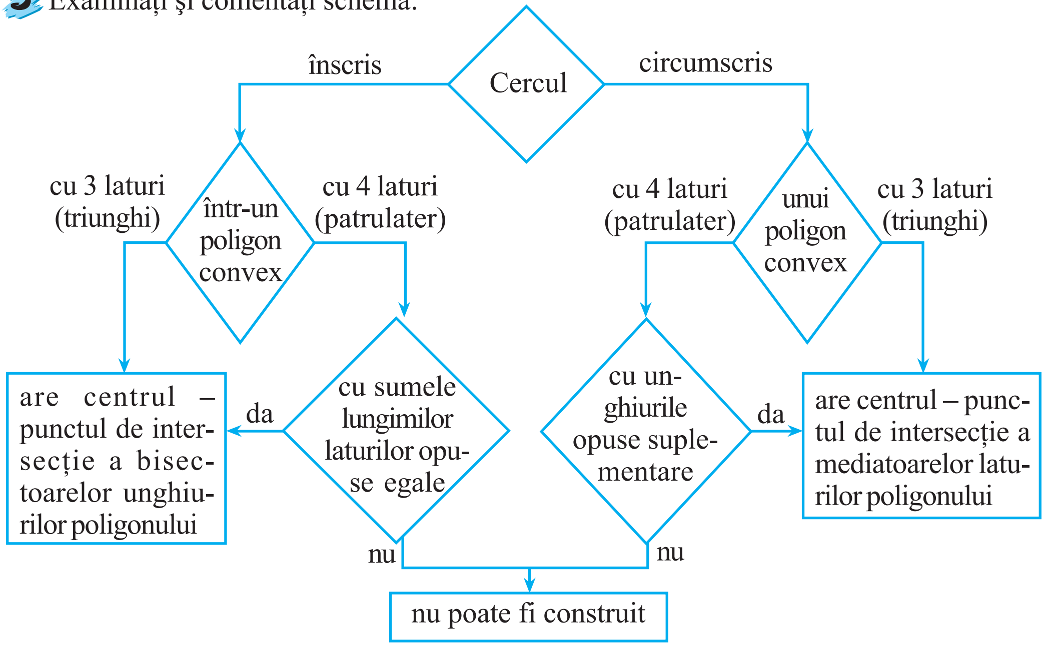
④ În mod similar obținem că $m(\angle B) = \square° = 180° - \square° = 180° - m(\angle \square)$.

Răspuns: $m(\angle B) = \square°$; $m(\angle C) = \square°$.

Teorema 10
Dacă unghiurile opuse ale unui patrulater sînt suplementare, atunci acestui patrulater i se poate circumscrie un cerc.

• Formulați reciproca teoremei 10, care de asemenea este teoremă.

3 Examinați și comentați schema:



• Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției:

a) În orice triunghi poate fi înscris un cerc.

b) În orice patrulater convex poate fi înscris un cerc.

c) Oricărui triunghi i se poate circumscrie un cerc.

d) Oricărui patrulater convex i se poate circumscrie un cerc.

e) Suma măsurilor unghiurilor opuse ale unui patrulater inscriptibil este egală cu $180°$.

f) Sumele lungimilor laturilor opuse ale unui patrulater circumscris unui cerc sînt egale.

Pentru cei curioşi! Dacă a este latura unui triunghi echilateral, iar R şi r razele cercului circumscris, respectiv înscris în acest triunghi, atunci $R = a\sqrt{3}$, iar $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$.

Exerciții și probleme

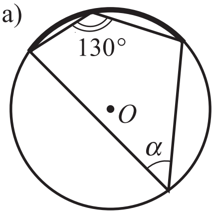
Fixăm cunoștințele

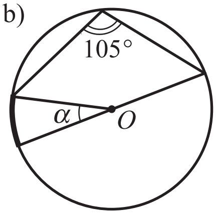
1. În care dintre următoarele figuri geometrice putem înscrie un cerc:
a) triunghi scalen; b) triunghi isoscel; c) triunghi echilateral;
d) patrulater convex oarecare; e) paralelogram oarecare; f) romb oarecare;
g) dreptunghi oarecare; h) pătrat?

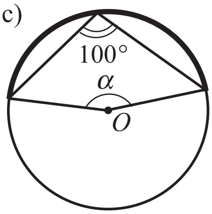
2. Fie $\mathscr{C}(O, r = 5 \text{ cm})$. Construiți:
a) un triunghi scalen înscris în cerc; b) un triunghi dreptunghic înscris în cerc;
c) un triunghi obtuzunghic înscris în cerc; d) un dreptunghi înscris în cerc;
e) un pătrat înscris în cerc.

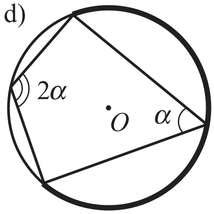
3. Fie M, N, K punctele de tangență ale unui cerc cu laturile triunghiului ABC, astfel încît $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $K \in [AC]$. Aflați perimetrul triunghiului ABC, dacă:
a) $AB = 12$ cm, $KC = 6$ cm; b) $BN = 12$ cm, $AC = 15$ cm.

4. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):

a) 

b) 

c) 

d) 

5. Fie M, N, K punctele de tangență ale laturilor triunghiului ABC cu cercul înscris în triunghi. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului MNK, dacă:

a) $m(A) = 76°$, $m(\angle B) = 48°$; b) $m(A) = 110°$, $m(\angle C) = 40°$.

6. Calculați lungimile segmentelor determinate de vîrfurile unui triunghi şi punctele de tangență ale cercului înscris în triunghi, dacă lungimile laturilor triunghiului sînt de:

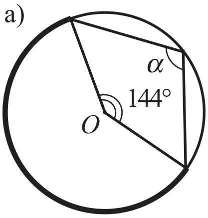
a) 12 cm, 8 cm, 9 cm; b) 17 cm, 13 cm, 14 cm.

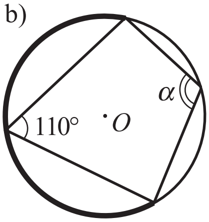
7. Vîrfurile triunghiului ABC aparțin cercului $\mathscr{C}(O, r)$. Stabiliți tipul triunghiului (ascuțitunghic, obtuzunghic, dreptunghic), dacă:

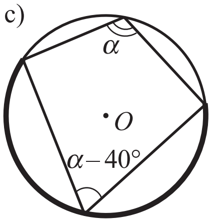
a) $O \in \operatorname{Int} \Delta ABC$; b) $O \in \operatorname{Ext} \Delta ABC$; c) $O \in AB$; d) $O \in AC$.

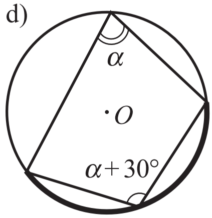
8. Cercul înscris în triunghiul isoscel ABC atinge laturile laterale AB şi AC în punctele M şi respectiv N, iar baza – în punctul K. Aflați AM şi BK, dacă $AB = 25$ cm, $BC = 14$ cm.

9. Calculați măsura unghiului α (O este centrul cercului):

a) 

b) 

c) 

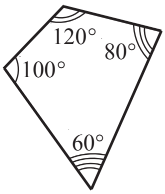
d) 

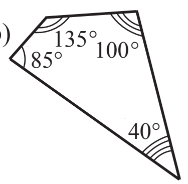
Formăm capacitățile și aplicăm

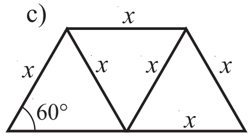
10. Construiți un triunghi cu laturile de 8 cm, 9 cm, 10 cm şi cercul circumscris acestuia.

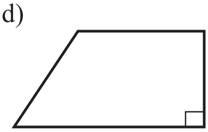
11. Construiți un triunghi cu laturile de 8 cm, 9 cm, 12 cm şi cercul înscris în acest triunghi.

12. Reproduceți desenul. Stabiliți dacă patrulaterul este inscriptibil şi construiți cercul circumscris lui:

a) 

b) 

c) 

d) 

13. Înălțimea unui triunghi dreptunghic corespunzătoare ipotenuzei împarte ipotenuza în două segmente cu lungimile de 9 cm şi 16 cm.

14. Fie M, N, K punctele de tangență ale laturilor triunghiului ABC cu cercul înscris în triunghi. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului MNK, dacă:

a) $m(\angle A) = 30°$, $m(\angle B) = 75°$; b) $m(\angle B) = 44°$, $m(\angle C) = 52°$; c) $m(\angle A) = 106°$, $m(\angle C) = 38°$.

15. Construiți triunghiul ABC cu laturile de:
a) 10 cm, 10 cm, 8 cm; b) 6 cm, 8 cm, 10 cm; c) 12 cm, 8 cm, 5 cm.
Construiți cercul circumscris triunghiului ABC. Stabiliți cu ajutorul riglei dacă proiecțiile ortogonale ale punctului arbitrar M de pe cerc pe laturile triunghiului sînt sau nu coliniare. Trageți concluzia.

16. Fie M, N, K punctele de tangență ale laturilor triunghiului ABC cu cercul înscris în triunghi. Aflați măsura unghiurilor triunghiului ABC, dacă: a) $m(\angle MNK) = 40°$, $m(\angle MKN) = 80°$;
b) $m(\angle MNK) = 65°$, $m(\angle KMN) = 48°$; c) $m(\angle MKN) = 44°$, $m(\angle KMN) = 52°$.

17. Raza cercului circumscris unui triunghi isoscel este de 3,125 cm, iar raza cercului înscris în acest triunghi – de 1,5 cm. Aflați lungimile laturilor triunghiului, știind că, exprimate în centimetri, ele reprezintă numere întregi.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

18. Demonstrați că un trapez este inscriptibil dacă este trapez isoscel.

19. Fie $ABCD$ pătrat cu latura de 18 cm, $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, astfel încît $AM = 6$ cm, $BN = 4$ cm. Aflați raza cercului circumscris triunghiului DMN.

20. Triunghiul echilateral ABC este înscris în cercul $\mathscr{C}(O, r = 6 \text{ cm})$. Cercul $\mathscr{C}(O_1, r_1)$ este tangent la cercul $\mathscr{C}(O, r)$ și la laturile AB și BC ale triunghiului. Aflați O_1A.
Indicație. Folosiți faptul că punctul O_1 se află pe o bisectoare a triunghiului ABC.

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. a) Construiți un cerc de rază 5 cm. Construiți coardele AB de 5 cm, BC de 6 cm, diametrele MN și KL.
b) Măsurați unghiurile LMK și LNK.

2. Stabiliți poziția punctului A față de $\mathscr{C}(O, r = 7\sqrt{3} \text{ cm})$, dacă:
a) $OA = \dfrac{19}{2\sqrt{3}}$ cm; b) $OA = (4\sqrt{3} + 2\sqrt{5})$ cm; c) $OA = \dfrac{21}{\sqrt{3}}$ cm; d) $OA = (7 + \sqrt{3})$ cm.

3. Punctele A, B, C aparțin $\mathscr{C}(O, r = 6{,}5 \text{ cm})$, astfel încît $[AB]$ este diametru. Aflați AC, dacă $BC = 12$ cm.

4. Fie $\mathscr{C}(O, r = 8\sqrt{5} \text{ cm})$ și coardele AB și CD congruente.
Aflați $d(O, AB)$, dacă $d(O, CD) = 6$ cm.

5. Fie $\mathscr{C}(O, r = \sqrt{19} \text{ cm})$. Determinați lungimea coardei AB, dacă $d(O, AB) = \sqrt{6}$ cm.

6. Desenați și notați un unghi la centru de $45°$ al cercului $\mathscr{C}(O, r = 6 \text{ cm})$.

7. Punctele M, N, K, L sînt situate, în această ordine, pe un cerc. Aflați:
a) $m(\smile MN)$, dacă $m(\smile ML) = 115°$, $m(\smile NL) = 55°$;
b) $m(\smile NK)$, dacă $m(\smile MK) = 37°$, $m(\smile NL) = 65°$, $m(\smile ML) = 85°$;
c) $m(\smile KL)$, dacă $m(\smile MN) = 39°$, $m(\smile MK) = 94°$, $m(\smile NL) = 122°$.

8. Construiți în $\mathscr{C}(O, r = 4{,}5 \text{ cm})$ un unghi înscris de: a) 100°; b) 160°; c) 240°; d) 180°.

9. Coardele AB şi CD se intersectează în punctul M interior cercului. Aflaţi:
a) AM, dacă $CM = 18$ cm, $MD = 3$ cm, $MB = 9$ cm;
b) MB, dacă $AM = \sqrt{7}$ cm, $CM = 3{,}5$ cm, $MD = 8$ cm.

10. Punctele A, B, C, D sînt situate, în această ordine, pe cerc şi $AB \cap CD = \{M\}$. Aflaţi:
a) CM, dacă $AM = 24$ cm, $MB = 8$ cm, $MD = 16$ cm;
b) MD, dacă $AM = \frac{2}{3}$ cm, $MB = \frac{3}{4}$ cm, $CM = 1$ cm.

11. Punctele A, B, C sînt situate pe cercul de centru O. Aflaţi:
a) $m(\angle ABC)$, dacă $m(\angle AOC) = 104°$;
b) $m(\angle AOC)$, dacă $m(\angle ABC) = 37°$;
c) $m(\angle OAC)$, dacă $m(\angle AOC) = 88°$;
d) $m(\angle ACO)$, dacă $m(\angle ABC) = 29°$.

12. Care este măsura arcului descris de minutarul unui ceas la un interval de:
a) 5 minute; b) 25 de minute; c) 45 de minute?

Formăm capacitățile și aplicăm

13. Construiţi triunghiul ABC cu laturile de $\sqrt{5}$ cm, $2\sqrt{5}$ cm, $3\sqrt{2}$ cm şi cercul circumscris lui.

14. Punctele A, B, C aparţin $\mathscr{C}(O, r = 2\sqrt{6}$ cm$)$, astfel încît $[AB]$ este diametru. Determinaţi BC, dacă $OM = 4$ cm, unde M este mijlocul segmentului BC.

15. Folosind echerul şi compasul, construiţi un unghi de: a) $135°$; b) $157°\,30'$.

16. Diametrul AB al cercului de rază $2\sqrt{17}$ cm intersectează coarda CD în mijlocul ei – M. Aflaţi AM şi BD, dacă $CM = 5\sqrt{2}$ cm.

17. Mediatoarea coardei AB intersectează cercul în punctele C şi D. Aflaţi raza cercului, dacă $AB = 14$ cm şi $d(C, AB) = 4$ cm.

18. Din punctul M s-au dus tangentele la $\mathscr{C}(O, r = 6$ cm$)$, punctele A şi B fiind puncte de tangenţă. Determinaţi OM, dacă $AM = 9$ cm.

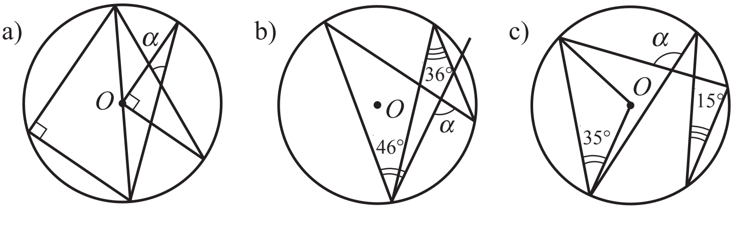
19. Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului ABC înscris în cerc, dacă:
a) $m(\smile AB) = 50°$, $m(\smile AC) = 80°$;
b) $m(\smile AB) = 46°$, $m(\smile AC) = 74°$.

20. Patrulaterul $ABCD$ este înscris într-un cerc. Calculaţi măsurile unghiurilor patrulaterului, măsurile unghiurilor formate de laturi şi diagonale, dacă:
a) $m(\smile AB) = 62°$, $m(\smile BC) = 86°$, $m(\smile AD) = 110°$;
b) $m(\smile AB) = 25°$, $m(\smile BC) = 55°$, $m(\smile AD) = 140°$.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

21. Trapezul isoscel $ABCD$ cu baza mare AD este circumscris unui cerc. Aflaţi raza cercului, dacă $AB = 20$ cm, $BC = 8$ cm.

22. Calculaţi măsura unghiului α (O este centrul cercului):



23. Demonstraţi că măsura unghiului cu vîrful în interiorul cercului este egală cu semisuma măsurii arcului cuprins între laturile sale şi a arcului cuprins între prelungirile laturilor sale.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru:
45 de minute

Varianta I

1. a) Desenați un cerc cu centrul M şi raza de 3 cm. Construiți diametrul BD, coardele DA şi BA, precum şi tangenta la cerc în punctul A. **3p**

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă $MX = (\sqrt{3}+2)$ cm, atunci punctul X este exterior cercului.” Justificați. **2p**

c) Ştiind că $m(\angle AMB) = 50°$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ABD. **4p**

d) Ştiind că $m(\angle AMB) = 50°$, aflați măsura ungiului format de tangenta construită şi coarda DA. **3p**

2. Fie cercul cu centru O şi raza de 13 cm. Diametrul AB este perpendicular pe coarda MN de 24 cm şi o intersectează în punctul C.

a) Aflați distanța de la punctual O la coarda MN. **3p**

b) În ce raport punctul C împarte diametrul AB? **3p**

3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu bazele BC de 9 cm şi AD de 25 cm este înscris un cerc cu centru O.

a) Aflați lungimea laturii laterale a trapezului. **3p**

b) Determinați raza cercului. **4p**

c) Demonstrați că triunghiul AOB este dreptunghic. **4p**

Varianta II

1. a) Desenați un cerc cu centrul N şi raza de 2 cm. Construiți diametrul AB, coardele AC şi BC, precum şi tangenta la cerc în punctul A.

b) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției: „Dacă $NY = (\sqrt{5}-1)$ cm, atunci punctul Y este exterior cercului.” Justificați.

c) Ştiind că $m(\angle CBA) = 40°$, aflați măsurile unghiurilor triunghiului ACN.

d) Ştiind că $m(\angle CBA) = 40°$, aflați măsura ungiului format de tangenta construită şi coarda AC.

2. Coarda AB de 40 cm a cercului de centru O este perpendiculară pe diametrul DC, îl intersectează în punctul K şi se află la 21 cm de centrul cercului.

a) Aflați raza cercului.

b) În ce raport punctul K împarte diametrul DC?

3. În trapezul isoscel $ABCD$ cu laturile laterale AB de 24 cm, CD de 25 cm este înscris un cerc cu centru Q.

a) Aflați raza cercului.

b) Determinați lungimea bazelor trapezului.

c) Demonstrați că triunghiul CDQ este dreptunghic.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	29–28	27–25	24–21	20–17	16–13	12–10	9–7	6–5	4–3	2–1

Capitolul

3

Arii

§ 1. Noțiunea de arie

Am întîlnit noțiunea de arie în clasele anterioare, cînd am calculat aria pătratului, a dreptunghiului. De fapt, am calculat aria suprafeței mărginite de aceste poligoane.

Reuniunea poligonului convex şi a interiorului său se numeşte **suprafață poligonală convexă**. Reuniunea unui număr finit de suprafețe poligonale convexe este **o suprafață poligonală**.

Aria este un număr ce caracterizează o suprafață poligonală. Totuşi, prin tradiție, în loc de aria suprafeței poligonale vom spune aria poligonului. Notăm aria poligonului $A_1A_2...A_n$ prin $\mathscr{A}_{A_1A_2...A_n}$.

Admitem ca fiind evidente următoarele proprietăți ale ariei:

1° Aria poligonului este un număr nenegativ.

2° Ariile poligoanelor congruente sînt egale.

3° Aria unui poligon este suma ariilor poligoanelor, cu interioarele disjuncte fiecare două, în care se descompune poligonul dat.

4° Aria pătratului cu laturile de lungime 1 este egală cu 1.

Deci, dacă laturile pătratului sînt de 1 m, atunci aria lui este egală cu un metru pătrat (se scrie m^2); dacă latura pătratului este de 1 cm, atunci aria lui este egală cu un centimetru pătrat (se scrie cm^2) etc.

Poligoanele cu ariile egale se numesc **poligoane echivalente**.

§ 2. Aria paralelogramelor

2.1. Aria pătratului, aria dreptunghiului, aria rombului

NE AMINTIM

1 Calculați aria pătratului cu laturile de 2,5 cm.

Rezolvare:

Aria pătratului cu laturile de lungime a se calculează cu formula $\mathscr{A} = a^2$. Deci, $\mathscr{A} = 2{,}5^2 = 6{,}25\ (\mathrm{cm}^2)$.

2 Fie pătratul $ABCD$ (fig. 1).

a) Comparați ariile triunghiurilor ABC şi ADC.

b) Calculați aria triunghiului ABC, dacă laturile pătratului sînt de 3 cm.

Rezolvare:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (Criteriul CC). Deci, conform proprietății 2°, $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{ADC}$.

b) Conform proprietății 3°, $\mathscr{A}_{ABCD} = \mathscr{A}_{ABC} + \mathscr{A}_{ACD} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 3^2 = 4{,}5\ (\text{cm}^2)$.

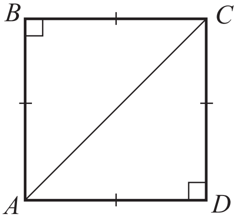


Fig. 1

GENERALIZĂM

Aria pătratului cu laturile de lungime a este a^2.

Aria triunghiului dreptunghic isoscel cu lungimile catetelor egale cu a este $\frac{a^2}{2}$.

3 Calculați aria dreptunghiului cu laturile de 7,2 cm şi 1,1 cm.

Rezolvare:

Aria dreptunghiului cu lungimile laturilor a şi b se calculează cu formula $\mathscr{A} = a\cdot b$.
Prin urmare, $\mathscr{A} = 7{,}2\cdot 1{,}1 = 7{,}92\ (\text{cm}^2)$.

4 Fie dreptunghiul $ABCD$ (fig. 2).

a) Comparați ariile triunghiurilor ABC şi ADC.

b) Calculați aria triunghiului ABC, dacă laturile dreptunghiului sînt de 6 cm şi 12 cm.

Rezolvare:

a) $\Delta ABC \equiv \Delta ADC$ (Criteriul CC). Deci, conform proprietății 2°, $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{ADC}$.

b) Conform proprietății 3°, $\mathscr{A}_{ABCD} = \mathscr{A}_{ABC} + \mathscr{A}_{ACD} \Rightarrow$
$\Rightarrow \mathscr{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\mathscr{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12 = 36\ (\text{cm}^2)$.

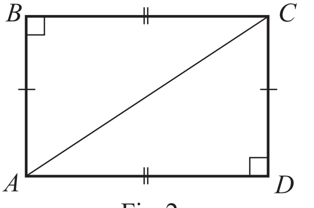


Fig. 2

GENERALIZĂM

Aria dreptunghiului cu lungimile laturilor a şi b este $\mathscr{A} = a\cdot b$.

Aria triunghiului dreptunghic cu lungimile catetelor a şi b este $\mathscr{A} = \frac{1}{2}a\cdot b$.

INVESTIGĂM

5 Calculați aria rombului $ABCD$ cu $AC = 13{,}4$ cm și $BD = 18$ cm.

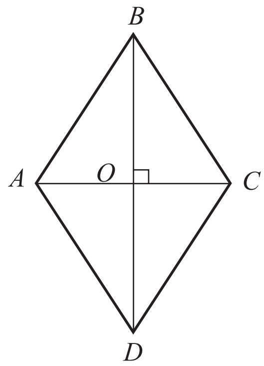


Fig. 3

Rezolvare:

Fie O punctul de intersecție a diagonalelor rombului. Diagonalele rombului sînt perpendiculare și punctul de intersecție le înjumătățește.

Triunghiurile dreptunghice AOB, COB, COD, AOD sînt congruente. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD} = 4\mathcal{A}_{AOB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AO \cdot BO =$
$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 13{,}4 \cdot 18 = 120{,}6$ (cm^2).

GENERALIZĂM

Aria rombului este egală cu semiprodusul lungimilor diagonalelor.

$\boxed{\mathcal{A}_{\text{romb}} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}}$, unde d_1 și d_2 sînt lungimile diagonalelor rombului.

2.2. Aria paralelogramului oarecare

INVESTIGĂM

1 Fie paralelogramul $ABCD$ și $[BM]$, $[CN]$ – înălțimi ale lui (fig. 4).

a) Comparați ariile triunghiurilor ABM și DCN.

b) Calculați aria paralelogramului $ABCD$, dacă $MB = 8$ cm și $AD = 11$ cm.

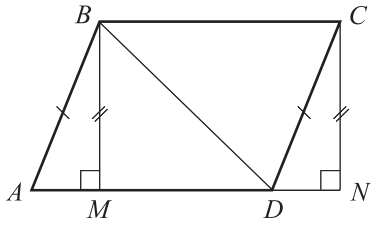


Fig. 4

Rezolvare:

a) $\Delta ABM \equiv \Delta DCN$ (Criteriul CI). Deci, conform proprietății 2°, $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{DCN}$.

b) Conform proprietății 3°, $\mathcal{A}_{ABCD} = \mathcal{A}_{MBCD} + \mathcal{A}_{ABM} =$

$= \mathcal{A}_{MBCD} + \mathcal{A}_{DCN} = \mathcal{A}_{MBCN}$.

$MBCN$ este dreptunghi și $\mathcal{A}_{MBCN} = MB \cdot BC = MB \cdot AD = 8 \cdot 11 = 88$ (cm^2).

GENERALIZĂM

Aria paralelogramului este egală cu produsul dintre lungimea unei laturi și înălțimea corespunzătoare acestei laturi.

$\boxed{\mathcal{A}_{\text{par}} = a \cdot h}$, unde h este înălțimea corespunzătoare laturii de lungime a.

§ 3. Aria triunghiului

INVESTIGĂM

1 Calculați aria triunghiului ABC cu înălțimea BM, dacă $AC = 16$ cm, $BM = 8$ cm.

Rezolvare:

Triunghiurile AMB şi BMC sînt dreptunghice (fig. 5).

Prin urmare, $\mathscr{A}_{AMB} = \frac{1}{2}BM \cdot AM$, $\mathscr{A}_{BMC} = \frac{1}{2}BM \cdot MC$.

Deci, $\mathscr{A}_{ABC} = \mathscr{A}_{AMB} + \mathscr{A}_{BMC} = \frac{1}{2}BM \cdot AM + \frac{1}{2}BM \cdot MC =$

$= \frac{1}{2}BM(AM + MC) = \frac{1}{2}BM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 8 = 64\,(\text{cm}^2)$.

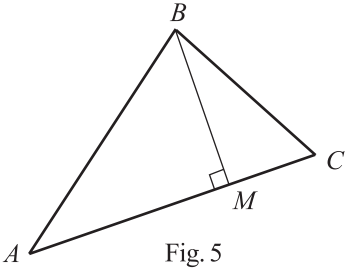


Fig. 5

GENERALIZĂM ŞI AFLĂM

- **Aria triunghiului** este egală cu semiprodusul dintre lungimea unei laturi şi înălțimea corespunzătoare acestei laturi.

$\boxed{\mathscr{A} = \frac{1}{2}a \cdot h}$, unde h este înălțimea corespunzătoare laturii de lungime a a triunghiului.

- **Formula lui Herone**:

$\boxed{\mathscr{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$, unde a, b, c sînt lungimile laturilor triunghiului, iar $p = \frac{a+b+c}{2}$ este semiperimetrul lui.

Teorema 1

Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea este egal cu pătratul raportului de asemănare.

2 Fie triunghiul ABC şi $M \in (AC)$, astfel încît $\frac{AM}{MC} = 4$ (fig. 7). Calculați $\frac{\mathscr{A}_{ABM}}{\mathscr{A}_{BMC}}$.

Rezolvare:

Construim punctul $N \in AC$, astfel încît $BN \perp AC$.

Aşadar, $[BN]$ este înălțimea comună a triunghiurilor ABM şi BMC.

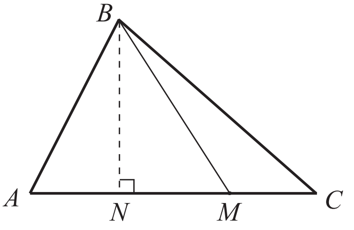


Fig. 7

Avem $\frac{\mathscr{A}_{ABM}}{\mathscr{A}_{BMC}} = \frac{\frac{1}{2}BN \cdot AM}{\frac{1}{2}BN \cdot MC} = \frac{AM}{MC} = 4$.

Teorema 2

Fie triunghiul ABC şi $M \in (AC)$. Atunci $\frac{\mathcal{A}_{ABM}}{\mathcal{A}_{BMC}} = \frac{AM}{MC}$.

Consecinţă. O mediană a unui triunghi descompune triunghiul în două triunghiuri echivalente.

§ 4. Aria trapezului

INVESTIGĂM

1 Fie trapezul $TRAP$ cu baza mare TP de lungime a, baza mică RA de lungime b şi înălţimea h.

Calculaţi aria trapezului.

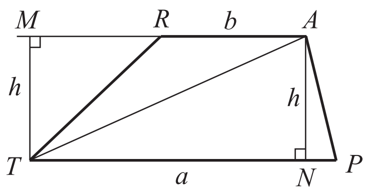


Fig. 8

Rezolvare:

Construim punctele $M \in RA$ şi $N \in TP$, astfel încît $TM \perp RA$, $AN \perp TP$ (fig. 8). Evident, $TM = AN = h$.

Atunci $\mathcal{A}_{TRAP} = \mathcal{A}_{TRA} + \mathcal{A}_{TAP} = \frac{1}{2}TM \cdot RA + \frac{1}{2}AN \cdot TP = \frac{1}{2}h \cdot b + \frac{1}{2}h \cdot a = \frac{1}{2}h(a+b)$.

GENERALIZĂM

Aria trapezului cu bazele de lungimile a şi b şi înălţimea h se calculează cu formula $\boxed{\mathcal{A} = \frac{1}{2}h(a+b) = h \cdot m}$, unde m este lungimea liniei mijlocii a trapezului.

2 Fie trapezul $ABCD$ cu $AD \parallel BC$ (fig. 9).

a) Comparaţi $\mathcal{A}_{ABD}$ şi $\mathcal{A}_{ACD}$, $\mathcal{A}_{ABC}$ şi $\mathcal{A}_{BCD}$.

b) Fie $\{I\} = AC \cap BD$. Comparaţi $\mathcal{A}_{ABI}$ şi $\mathcal{A}_{CID}$.

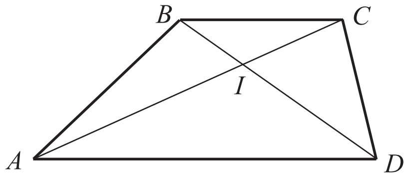


Fig. 9

Rezolvare:

a) Înălţimile triunghiurilor ABD şi ACD, coborîte din vîrfurile B şi C pe latura comună AD, sînt înălţimi ale trapezului. Prin urmare, triunghiurile ABD şi ACD sînt echivalente, adică $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD}$. Similar, se poate arăta că $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{BCD}$.

b) $\mathcal{A}_{ABI} = \mathcal{A}_{ABD} - \mathcal{A}_{AID}$, $\mathcal{A}_{CID} = \mathcal{A}_{ACD} - \mathcal{A}_{AID}$.

Dar conform a), $\mathcal{A}_{ABD} = \mathcal{A}_{ACD}$. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABI} = \mathcal{A}_{CID}$.

GENERALIZĂM

Diagonalele unui trapez şi laturile neparalele formează cu una dintre baze triunghiuri echivalente.

Triunghiurile formate de diagonalele unui trapez cu laturile neparalele sînt echivalente.

§ 5. Aria poligonului regulat. Lungimea cercului și aria discului

1 Ştiind că m este lungimea apotemei, iar l – lungimea laturii, calculați aria poligonului regulat cu: a) 6 laturi; b) n laturi.

Rezolvare:

a) Poligonul regulat cu 6 laturi se numeşte hexagon regulat.

Fie O centrul cercului înscris în hexagonul regulat $ABCDEF$ (fig. 10). Evident că triunghiurile AOB, BOC, COD, DOE, EOF şi AOF sînt congruente şi suma ariilor lor este egală cu aria hexagonului $ABCDEF$.

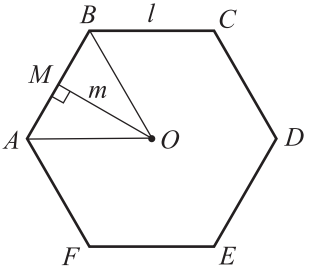


Fig. 10

Prin urmare,

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \mathcal{A}_{AOB}. \qquad (1)$$

Fie $[OM]$ înălțime a triunghiului AOB. Deoarece ΔAOB este isoscel, rezultă că $[OM]$ este şi apotemă, adică $OM = m$.

$$\mathcal{A}_{AOB} = \frac{1}{2} OM \cdot AB = \frac{1}{2} m \cdot l. \qquad (2)$$

Substituind (2) în (1), obținem:

$$\mathcal{A}_{ABCDEF} = 6 \cdot \frac{1}{2} ml = 3ml.$$

Răspuns: $3ml$.

b) Fie $A_1A_2 \ldots A_n$ un poligon regulat cu n laturi, iar O – centrul cercului înscris în acest poligon (fig. 11).

Similar cazului a), dacă unim punctul O cu vîrfurile poligonului, obținem n triunghiuri congruente şi

$$\mathcal{A}_{A_1, A_2 \ldots A_n} = n \cdot \mathcal{A}_{A_1OA_2}.$$

Dar $\mathcal{A}_{A_1OA_2} = \frac{1}{2} ml.$

Prin urmare, $\mathcal{A}_{A_1, A_2 \ldots A_n} = \frac{1}{2} mnl.$

Răspuns: $\frac{1}{2} mnl.$

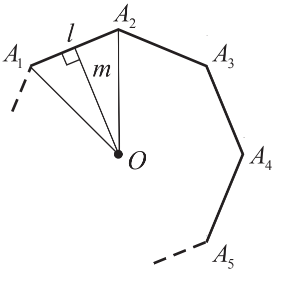


Fig. 11

GENERALIZĂM

Aria poligonului regulat cu n laturi, apotema de lungime m şi latura de lungime l se calculează cu formula $\mathcal{A}_n = \frac{1}{2} m \cdot n \cdot l.$

2 Fie un cerc cu raza 1. Se poate arăta că în acest cerc poate fi înscris orice poligon regulat cu n laturi. Calculînd perimetrele acestor poligoane, obținem, de exemplu:

pentru $n = 4$, $P_4 = 4\sqrt{2} \approx 5{,}656854$;

pentru $n = 8$, $P_8 = 8\sqrt{2 - \sqrt{2}} \approx 6{,}12253492$;

pentru $n=16$, $P_{16}=16\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\approx 6{,}24289030;$

pentru $n=32$, $P_{32}=32\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\approx 6{,}27309698.$

Observăm că perimetrele obținute sînt aproximativ egale. Este firesc, deoarece fiecare dintre ele aproximează cu o anumită exactitate lungimea cercului de rază 1. Evident, cu cît poligonul regulat are mai multe laturi, cu atît mai corect va fi calculată lungimea acestui cerc.

Perimetrele calculate aproximează dublul numărului irațional $\pi\approx 3{,}14159...$

Deci, lungimea cercului de rază 1 este 2π.

Se poate demonstra formula

$$\boxed{L=2\pi R},$$

unde L este lungimea cercului, iar R – raza lui.

3 Calculați aria $\mathscr{D}(O, R)$.

Rezolvare:

În $\mathscr{C}(O, R)$ înscriem un poligon regulat cu n laturi.

Aria acestui poligon este $\mathscr{A}_n=\frac{1}{2}n\cdot l\cdot m,$ unde l este lungimea laturii, iar m – lungimea apotemei poligonului.

Cu cît este mai mare n, cu atît mai bine $n\cdot l$ aproximează lungimea cercului, iar m – raza R a cercului. De aceea, putem considera $\mathscr{A}_{\text{discului}}=\frac{1}{2}L\cdot R,$ unde L este lungimea cercului ce mărgineşte discul.

Prin urmare, deoarece $L=2\pi R,$ obținem $\boxed{\mathscr{A}_{\text{discului}}=\pi R^2}$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Calculați perimetrul şi aria pătratului cu laturile de:
a) 3 cm; b) 3,7 cm; c) $6\sqrt{5}$ cm; d) $7\frac{2}{9}$ cm.

2. Aflați lungimea laturii pătratului, dacă aria lui este de:
a) 225 cm^2; b) 48 cm^2; c) $16\frac{1}{8}$ cm^2; d) $(\sqrt{3}-2)^2$ cm^2.

3. Calculați aria triunghiului dreptunghic isoscel cu catetele de lungime:
a) 2,7 cm; b) 3,5 cm; c) $(2+\sqrt{3})$ cm; d) $\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}-2}$ cm.

4. Aflați lungimea catetei unui triunghi dreptunghic isoscel, dacă aria lui este de:
a) 72 cm^2; b) 120 cm^2; c) $2\frac{1}{12}$ cm^2; d) $(2\sqrt{5}-5)^2$ cm^2.

5. Calculați aria dreptunghiului cu laturile de:
a) 4,4 cm şi 1,2 cm; b) $4\sqrt{7}$ cm şi $2\sqrt{7}$ cm;
c) $(2\sqrt{31}+\sqrt{29})$ cm şi $(2\sqrt{31}-\sqrt{29})$ cm; d) $11\frac{1}{16}$ cm şi $\frac{256}{177}$ cm.

6. Aflați perimetrul și aria triunghiului dreptunghic cu catetele de:

a) 3 dm și 40 cm; b) 12 cm și 50 mm; c) 0,8 m și 60 cm; d) 120 mm și 1,2 dm.

7. Determinați dimensiunile dreptunghiului cu aria $\mathcal{A}$ și perimetrul $\mathcal{P}$, dacă:

a) $\mathcal{A}=18{,}25\text{ cm}^2$, $\mathcal{P}=19{,}6\text{ cm}$; b) $\mathcal{A}=110\text{ cm}^2$, $\mathcal{P}=32\sqrt{2}\text{ cm}$;

c) $\mathcal{A}=\frac{14}{27}\text{ cm}^2$, $\mathcal{P}=1\frac{4}{9}\text{ cm}$; d) $\mathcal{A}=32\text{ cm}^2$, $\mathcal{P}=36\text{ cm}$.

8. Două loturi de pământ au formă de pătrate cu laturile respectiv de 15 m și 25 m. Aflați cealaltă dimensiune a unui lot de pământ de formă dreptunghiulară, echivalent cu loturile date, dacă o dimensiune este de 50 m.

9. Fie $ABCD$ paralelogram, $h_1=\mathrm{d}(A, BC)$, $h_2=\mathrm{d}(B, CD)$ și $\mathcal{A}$ – aria paralelogramului. Completați tabelul:

AB	BC	h_1	h_2	$\mathcal{A}$
	15	12	10	
$5\sqrt{5}$	5		$3\sqrt{5}$	
		7	10,5	210
	18		9	162

10. Fie h_a, h_b, h_c înălțimile unui triunghi corespunzătoare respectiv laturilor a, b, c, iar $\mathcal{A}$ – aria triunghiului. Completați tabelul:

a	b	c	h_a	h_b	h_c	$\mathcal{A}$
6	12		10		5	
	15		12	10	9	
14,4		16		12		144
24	30				21	210

11. Fie triunghiul ABC. Aflați aria triunghiului, dacă:

a) $AB=6\text{ cm}$, $BC=7\text{ cm}$, $AC=9\text{ cm}$;

b) $AB=18\text{ cm}$, $BC=9\sqrt{3}\text{ cm}$, $AC=8\sqrt{3}\text{ cm}$;

c) $AB=10\text{ cm}$, $BC=12\text{ cm}$, $m(\angle A)=90°$.

12. Fie h înălțimea trapezului $ABCD$ cu baza mare AB. Determinați ariile triunghiurilor ABC, ABD, ADC, DCB, dacă:

a) $AB=11\text{ cm}$, $CD=8\text{ cm}$, $h=9\text{ cm}$; b) $AB=7\sqrt{5}\text{ cm}$, $CD=4\sqrt{5}\text{ cm}$, $h=5\sqrt{5}\text{ cm}$;

c) $AB=9\frac{15}{22}\text{ cm}$, $CD=\frac{90}{11}\text{ cm}$, $h=11\text{cm}$; d) $AB=12\text{ cm}$, $AD=7\text{cm}$, $m(\angle A)=m(\angle B)=45°$.

13. Fie h înălțimea, m lungimea liniei mijlocii, iar $\mathcal{A}$ aria trapezului $ABCD$ cu baza mare AB. Completați tabelul:

AB	CD	h	m	$\mathcal{A}$
10	6	7		
18		22	16	
32		20		560

14. Determinați lungimea și aria cercului cu raza de:

a) 10 cm; b) 15 cm; c) 8 cm.

15. Aflați aria paralelogramului cu unghiul ascuțit de 45°, dacă una dintre diagonalele lui este de 9 cm şi coincide cu o înălțime.

16. Aria unui paralelogram cu înălțimile de 8 cm şi 6 cm este egală cu 72 cm^2. Aflați perimetrul paralelogramului.

17. Punctul E se află pe latura BC a paralelogramului $ABCD$ cu aria de 104 cm^2. Aflați aria triunghiului ABE.

18. Aflați aria discului mărginit de un cerc cu lungimea de 4π m.

Formăm capacitățile și aplicăm

19. Raza cercului circumscris unui poligon regulat cu n laturi este de 4 cm. Calculați aria poligonului, dacă: a) $n=6$; b) $n=8$; c) $n=10$.

20. Aflați perimetrul şi aria pătratului cu diagonalele de:
a) $12\sqrt{2}$ cm; b) 18 cm; c) $a\sqrt{2}$ cm; d) x cm.

21. De cîte ori se va mări aria pătratului, dacă latura lui se va mări:
a) de 3 ori; b) de 7 ori; c) de n ori?

22. De cîte ori se va micşora diagonala pătratului, dacă aria lui se va micşora:
a) de 4 ori; b) de 10 ori; c) de $(\sqrt{11}-4)^2$ ori?

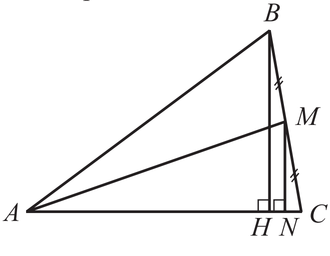
23. De cîte ori se va mări aria dreptunghiului, dacă:
a) o latură a lui se va mări de 4 ori; b) fiecare latură se va mări de 5 ori;
c) o latură se va mări de 8 ori, iar alta se va micşora de 3 ori?

24. Aflați aria trapezului isoscel $ABCD$ cu înălțimea BH de 7 cm, dacă punctul H împarte baza AD în două segmente, cel mai lung fiind de 9 cm.

25. Aflați aria unui trapez dreptunghic cu bazele de 12 cm şi 9 cm, iar latura laterală de 6 cm.

26. Vîrfurile unui trapez se află pe un cerc cu raza de 13 cm şi centrul pe baza trapezului. Aflați aria trapezului dacă înălțimea lui este de 12 cm.

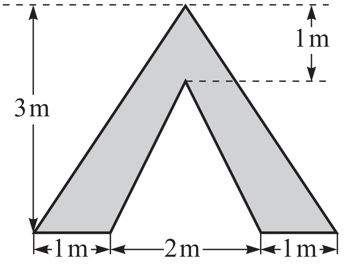
27. O diagonală a rombului a fost mărită cu 40%, alta – cu 20%. Cu cîte procente s-a mărit aria rombului?



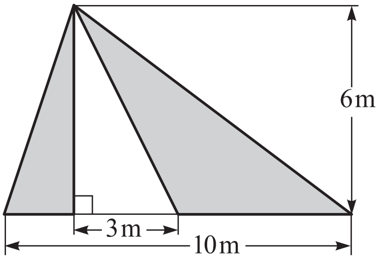
28. Examinați desenul. Ştiind că $AB=20\,\text{cm}$, $BH=12\,\text{cm}$, $AM=18\,\text{cm}$, aflați aria triunghiului ABC.

29. Pentru 1 m^2 de suprafață se utilizează 100 g de vopsea. De cîtă vopsea vom avea nevoie pentru a acoperi următoarea suprafață?

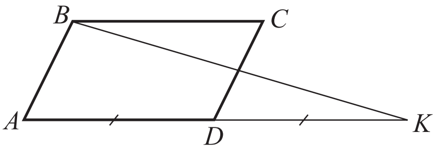
a)



b)



30. Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctul K situat pe dreapta AD, astfel încît $AD = DK$. Aflaţi aria paralelogramului $ABCD$, dacă $\mathcal{A}_{BDK} = 24\ \text{cm}^2$.



31. Aflaţi aria triunghiului dreptunghic, ştiind că suma lungimilor catetelor este egală cu 11 cm, iar suma pătratelor lor este egală cu $61\ \text{cm}^2$.

32. Calculaţi aria unui trapez cu diagonalele de 113 cm şi 17 cm, iar înălţimea de 15 cm.

33. Calculaţi raza unui disc, ştiind că aria lui este egală cu suma ariilor a două discuri cu razele de 5 cm şi 12 cm.

Dezvoltăm capacităţile şi creăm

34. Diagonala AC a paralelogramului $ABCD$ intersectează înălţimea BE în punctul O, astfel încît $\frac{BO}{OE} = \frac{5}{3}$. Aflaţi aria patrulaterului $BEDC$, dacă aria paralelogramului $ABCD$ este de $100\ \text{cm}^2$.

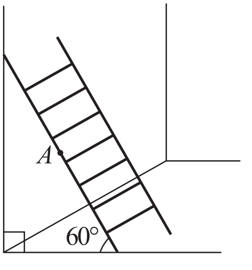
35. Punctul E aparţine laturii AD a dreptunghiului $ABCD$, astfel încît $\frac{AE}{ED} = \frac{m}{n}$. Determinaţi aria patrulaterului $BEDC$, dacă aria dreptunghiului $ABCD$ este S.

36. Centrul cercului înscris în triunghiul isoscel ABC cu baza AC împarte înălţimea BM în raportul $\frac{17}{15}$. Aflaţi perimetrul şi aria triunghiului, dacă raza cercului este de 7,5 cm.

37. Aflaţi aria trapezului cu bazele de 7 cm şi 20 cm şi diagonalele de 13 cm şi $5\sqrt{10}$ cm.

38. Determinaţi mulţimea punctelor M din interiorul triunghiului ABC isoscel cu AC, ştiind că $\mathcal{A}_{ABM} = \mathcal{A}_{BCM}$.

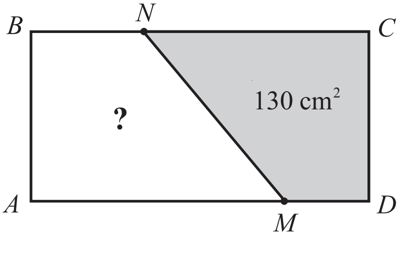
39. O scară se sprijină de un perete vertical sub un unghi de 60° faţă de podea. Scara alunecă de-a lungul peretelui pînă atinge cu capetele de sus podeaua. Aflaţi lungimea traiectoriei descrise de punctul A, aflat la jumătatea scării (vezi desenul), dacă lungimea scării este egală cu 6 m.



40. Determinaţi aria unui trapez cu bazele de 2 cm şi 3 cm, iar diagonalele de 3 cm şi 4 cm.

41. Bisectoarea unghiului drept al unui triunghi dreptunghic împarte ipotenuza în raportul 3 : 4. Aflaţi aria triunghiului, dacă lungimea ipotenuzei este de 35 cm.

42. Punctele M şi N se află pe laturile AD şi BC ale dreptunghiului $ABCD$ (vezi desenul), astfel încît $\frac{DM}{AM} = 0{,}25$, $\frac{CN}{BN} = 2$. Aflaţi $\mathcal{A}_{ABNM}$, dacă $\mathcal{A}_{DMNC} = 130\ \text{cm}^2$.



43. Într-un trapez isoscel este înscris un cerc de rază r. Determinaţi aria trapezului, dacă baza mare este de 2 ori mai lungă decît baza mică.

44. Construiţi 4 triunghiuri necongruente echivalente.

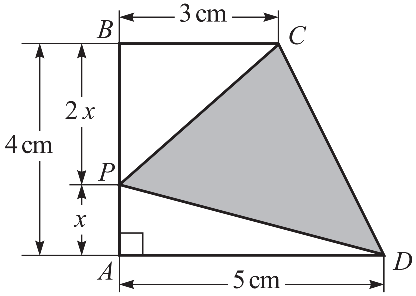
45. Împărţiţi un triunghi în 5 triunghiuri echivalente.

Test sumativ

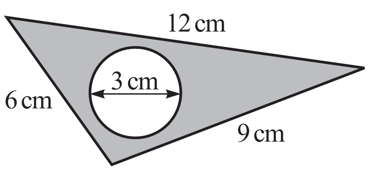
Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. Completați:
   a) Aria dreptunghiului cu laturile de 4 cm și 8 cm este egală cu ____. **2p**
   b) Aria triunghiului dreptunghic avînd catetele de 6 cm și 11 cm este egală cu ____. **2p**
   c) Aria paralelogramului cu o latură de 18 cm și înălțimea corespunzătoare acestei laturi de 5 cm este egală cu ____. **2p**
   d) Aria rombului cu diagonalele de 13 cm și 9 cm este egală cu ____. **2p**
2. *ABCD* este un trapez dreptunghic.



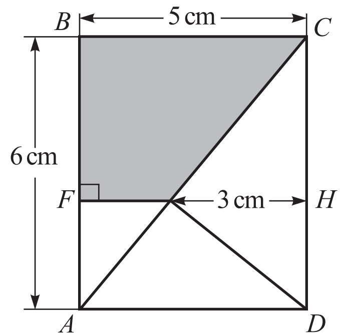
   a) Determinați aria trapezului *ABCD*. **2p**
   b) Aflați *AP*. **2p**
   c) Aflați aria domeniului colorat. **4p**
3. Examinați desenul. Determinați:
   a) aria discului; **3p**
   b) aria domeniului colorat. **4p**



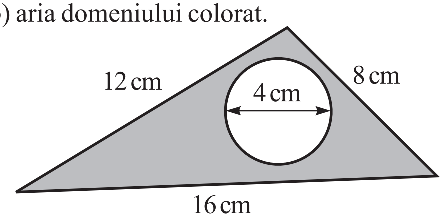
4. Fie punctele *A*(–7, 2), *B*(–3, 10), *C*(9, 4).
   Aflați: a) aria triunghiului *ABC*; **4p**
   b) coordonatele punctului *D*, dacă *ABCD* este dreptunghi; **4p**
   c) aria dreptunghiului *ABCD*. **3p**

Varianta II

1. Completați:
   a) Aria dreptunghiului cu laturile de 5 cm și 7 cm este egală cu ____.
   b) Aria triunghiului dreptunghic avînd catetele de 14 cm și 4 cm este egală cu ____.
   c) Aria paralelogramului cu o latură de 12 cm și înălțimea corespunzătoare acestei laturi de 6 cm este egală cu ____.
   d) Aria rombului cu diagonalele de 11 cm și 8 cm este egală cu ____.
2. *ABCD* este un dreptunghi.



   a) Determinați *BF*.
   b) Aflați aria domeniului colorat.
   c) Aflați aria triunghiului *AED*.
3. Examinați desenul. Determinați:
   a) aria discului;
   b) aria domeniului colorat.



4. Fie punctele *A*(–10, 4), *B*(2, 10), *C*(6, 2).
   Aflați: a) aria triunghiului *ABC*;
   b) coordonatele punctului *D*, dacă *ABCD* este dreptunghi;
   c) aria dreptunghiului *ABCD*.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	34–33	32–30	29–26	25–22	21–18	17–14	13–10	9–6	5–3	2–1

Capitolul 4

Poliedre

§ 1. Poliedre

1 Examinați suprafața fiecărui obiect din figura 1.

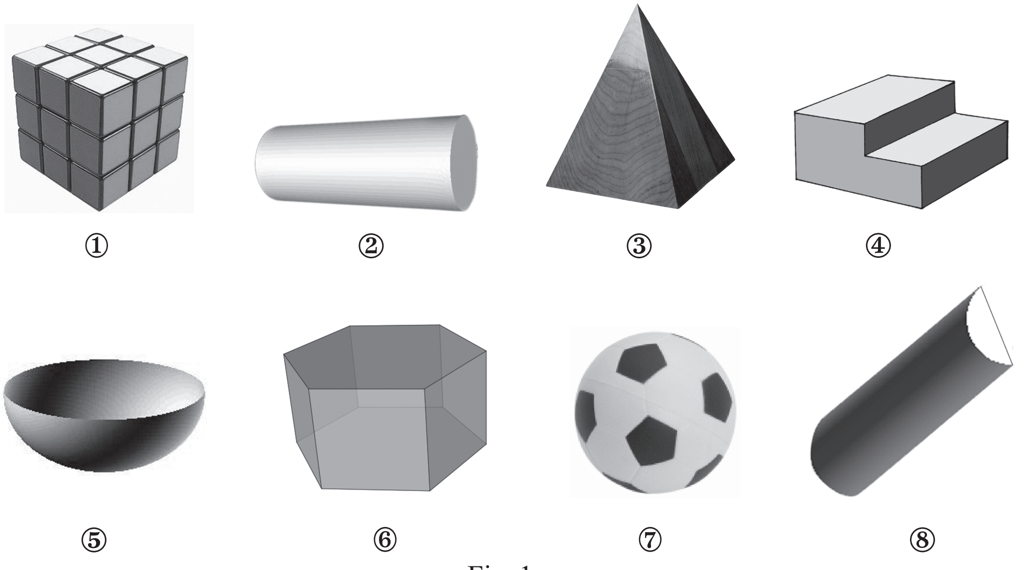


Fig. 1

a) Selectați obiectele mărginite doar de suprafețe poligonale.

b) Numiți corpurile geometrice studiate, ale căror modele reale se regăsesc în imaginile date.

c) Care dintre corpurile geometrice studiate au fețe, muchii, vîrfuri?

Definiții

♦ **Poliedrul** este un corp geometric mărginit doar de suprafețe poligonale.

Suprafețele poligonale ale poliedrului se numesc **fețe**, laturile fețelor – **muchii**, iar vîrfurile muchiilor – **vîrfuri** ale poliedrului.

♦ Segmentul cu extremitățile-vîrfuri a două fețe diferite se numeşte **diagonală** a poliedrului.

Observație. Uneori vom numi fața poliedrului cu numele poligonului care mărgineşte această față.

APLICĂM

Fie cubul $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (fig. 2). DD_1C_1C este o față, $[AA_1]-$ o muchie, $D-$ un vîrf, iar $[B_1D]-$ o diagonală a cubului.

• Numiți toate celelalte elemente ale cubului $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

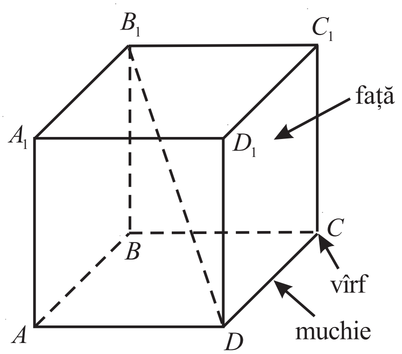


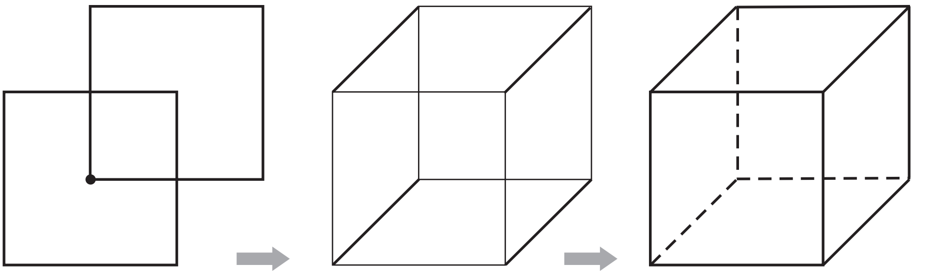
Fig. 2

2 Cum reprezentăm corect un cub?

① Construim un pătrat, apoi din centrul lui spre dreapta-sus construim un alt pătrat, congruent cu primul (fig. 3).

② Unim vîrfurile omoloage ale celor două pătrate.

③ „Întrerupem” muchiile care nu se văd în spațiu.



① ② ③

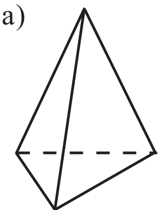
Fig. 3

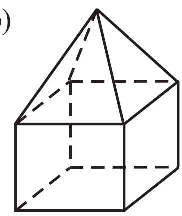
• Amintiți-vă cum se calculează aria suprafeței şi volumul cubului, apoi aflați aria suprafeței şi volumul unui cub cu muchia de 6 cm.

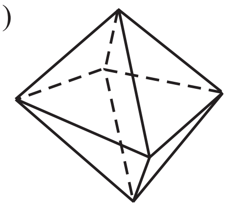
Exerciții și probleme

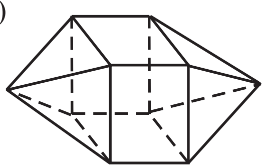
Fixăm cunoștințele

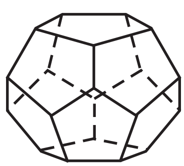
1. Examinați imaginile şi aflați cîte fețe are fiecare poliedru:

a)


b)


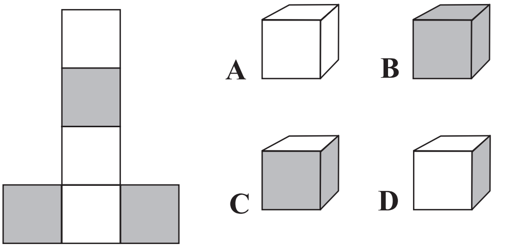
c)


d)


e)


2. Cîte diagonale are fiecare poliedru din imaginile problemei 1?

3. Care dintre cuburile date pot avea desfășurarea reprezentată?
Selectați varianta corectă de răspuns:
a) **A** şi **B**;
b) **C** şi **D**;
c) **A** şi **D**;
d) **B** şi **D**.



4. Determinați aria totală şi volumul unui cub cu latura de 3 cm.

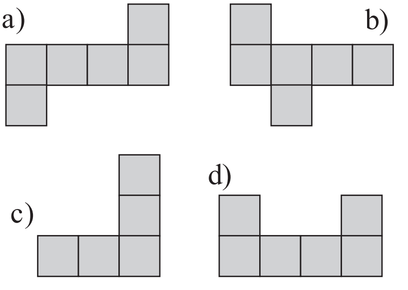
5. Aflați volumul şi aria totală a unui cub care are suma lungimilor muchiilor egală cu 48 cm.

6. Determinați aria totală şi volumul unui cub cu diagonala de $2\sqrt{3}$ cm.

Formăm capacitățile și aplicăm

7. O canistră are forma unui cub cu muchia de 30 cm. Care este capacitatea canistrei, măsurată în litri?

8. Mihai doreşte să facă o cutie de forma unui cub, dar fără capac, însă fundul cutiei să fie dublu. Care este desfăşurarea potrivită?
Selectați varianta corectă de răspuns.



9. Volumul unui cub este de 125 cm^3.
Determinați aria totală a cubului.

10. Aflați volumul unui cub cu aria totală de 24 cm^2.

11. Cît cîntăreşte un cub de gheață cu muchia de 20 cm, dacă 1 dm^3 de gheață cîntăreşte 0,9 kg?

12. Suma ariilor fețelor unui cub este egală cu 216 cm^2. Aflați lungimea diagonalei cubului.

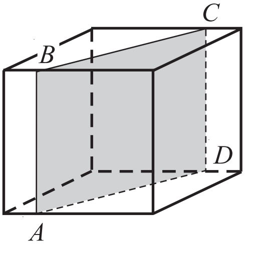
Dezvoltăm capacitățile și creăm

13. Aflați aria totală a unui cub cu diagonala mai lungă cu 1 cm decît muchia lui.

14. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 4$ cm. Aflați:
a) distanța de la D' la B;   b) distanța de la D' la AB.

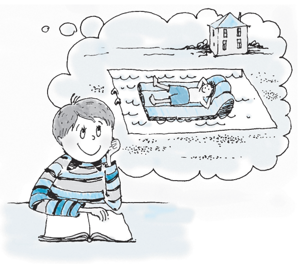
15. În cubul $ABCDA'B'C'D'$ punctul P este mijlocul lui $[C'D']$ şi $AP = 8\sqrt{7}$ cm. Aflați aria totală şi volumul cubului.

16. Un plan intersectează un cub în punctele A, B, C, D, care determină un dreptunghi.
Reprezentați similar cum trebuie un plan să intersecteze cubul pentru ca să determine:
a) un triunghi echilateral;
b) un hexagon regulat;
c) un trapez isoscel.



17. Un cub este format din 27 de cuburi mai mici identice. Comparați aria totală a cubului mare cu aria corpului care se obține din cubul mare înlăturînd toate cuburile mici de la vîrfurile cubului mare.

§ 2. Prisma



1 Doru Visătoru visează să-şi construiască o casă mare cu piscină. Fundul piscinei va avea forma unui dreptunghi cu dimensiunile de 10 m şi 5 m. Care va fi capacitatea piscinei, dacă adîncimea ei va fi de 2 m?

Pentru a rezolva problema, vom studia *prismele* – o clasă specială de poliedre.

Studiaţi atent paragraful şi spuneţi ce corp geometric sugerează piscina lui Doru.

2.1. Elementele prismei. Clasificarea prismelor

Amintim că două ***plane*** se numesc ***paralele*** dacă ele nu au niciun punct comun.

Definiţii

- **Prisma** este un poliedru format din două feţe congruente paralele, numite **baze**, şi din toate segmentele cu extremităţile aparţinînd acestor baze. Celelalte feţe ale prismei se numesc **feţe laterale**. Laturile feţelor laterale se numesc **muchii laterale** ale prismei.
- Mulţimea punctelor prismei care nu aparţin bazelor şi nici feţelor laterale se numeşte **interiorul prismei**.

De regulă, notînd prisma, scriem la început literele vîrfurilor bazei inferioare, apoi literele vîrfurilor bazei superioare.

Exemplu

Prisma din figura 4 poate fi notată $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$.

$A_1B_1C_1D_1E_1$ este o bază, EE_1D_1D – o faţă laterală, iar $[EE_1]$ – o muchie laterală a acestei prisme.

• Cîte muchii are prisma din figura 4? Dar diagonale?

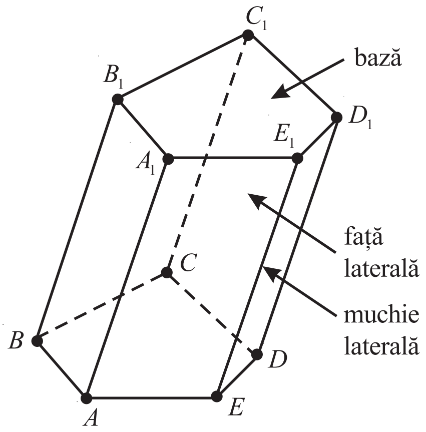


Fig. 4

Luînd în consideraţie definiţia prismei, se poate demonstra

Teorema 1

Laturile omoloage ale bazelor prismei sînt paralele şi congruente.

Astfel, în cazul prismei din figura 4, $AE \parallel A_1E_1$ şi $[AE] \equiv [A_1E_1]$, $AB \parallel A_1B_1$ şi $[AB] \equiv [A_1B_1]$ etc.

• Utilizînd teorema 1 şi criteriile paralelogramului, demonstraţi teoremele 2 şi 3.

Teorema 2

Feţele laterale ale prismei sînt paralelograme.

Teorema 3

Muchiile laterale ale prismei sînt paralele şi congruente.

Definiție

O **dreaptă este perpendiculară pe un plan** dacă ea este perpendiculară pe două drepte concurente ale acestui plan (fig. 5).

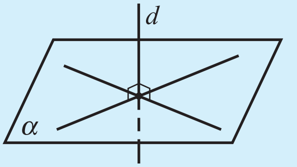


Fig. 5

Orice segment cu extremitățile în planele bazelor prismei, perpendicular pe ele, se numeşte ***înălțime*** a prismei. Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălțime***.

Dacă muchiile laterale ale prismei sînt perpendiculare pe planele bazelor, atunci prisma se numeşte ***prismă dreaptă*** (fig. 6 a)), în caz contrar – ***prismă oblică*** (fig. 6 b)). Observăm că fețele laterale ale prismei drepte sînt dreptunghiuri, iar muchiile ei laterale – înălțimi ale acesteia.

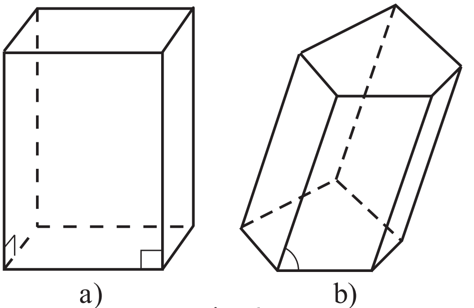


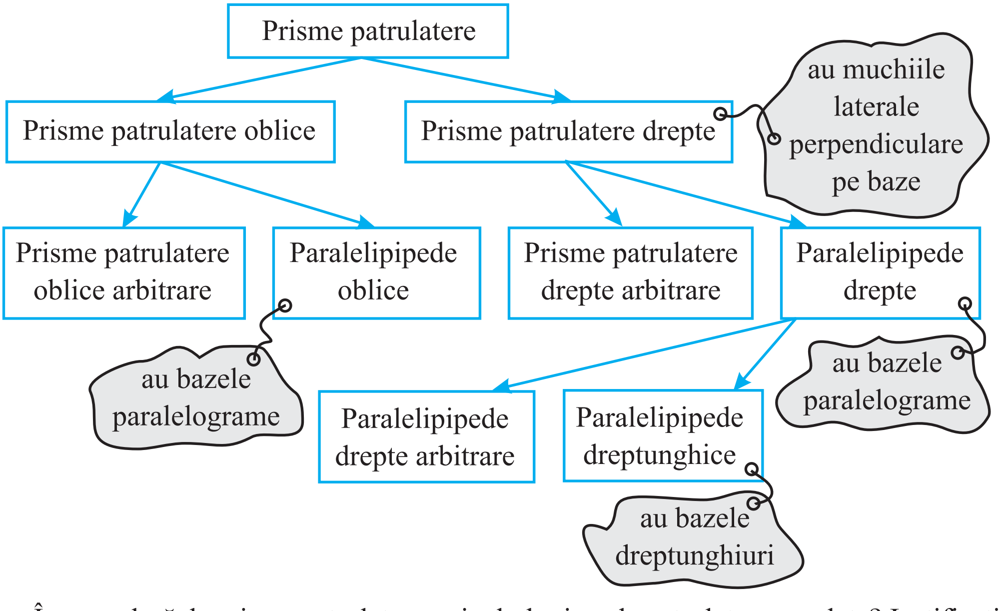
Fig. 6

Prisma dreaptă cu bazele poligoane regulate se numeşte ***prismă regulată***.

Prismele se clasifică după poligoanele bazelor: *triunghiulare*, *patrulatere*, *pentagonale*, *hexagonale* etc.

În figura 6 b) este reprezentată o prismă pentagonală oblică.

2 Examinați schema şi observați cum se clasifică prismele patrulatere.



• În care clasă de prisme patrulatere se includ prismele patrulatere regulate? Justificați.

APLICĂM

3 Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA_1B_1C_1D_1$ cu $AA' = 10$ cm, $AD = 8$ cm, $DC = 6$ cm (fig. 7). Aflați A_1C.

Rezolvare:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$ (1), → deoarece $[AC]$ este diagonala dreptunghiului $ABCD$.

$A_1C^2 = A_1A^2 + AC^2$ (2), → deoarece ΔA_1AC este dreptunghic în vîrful A.

$A_1C^2 = A_1A^2 + AD^2 + DC^2$. → substituim (1) în (2).

Deci,
$A_1A = \sqrt{10^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{200} =$ → $\sqrt{200} = \sqrt{100 \cdot 2} = \sqrt{100} \cdot \sqrt{2} = 10\sqrt{2}$.
$= 10\sqrt{2}$ (cm).

Răspuns: $10\sqrt{2}$ cm.

Teorema 4 (Teorema lui Pitagora în spațiu)

Pătratul diagonalei unui paralelipiped dreptunghic este egal cu suma pătratelor celor trei dimensiuni liniare ale acestuia:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 \text{ (fig. 8).}$$

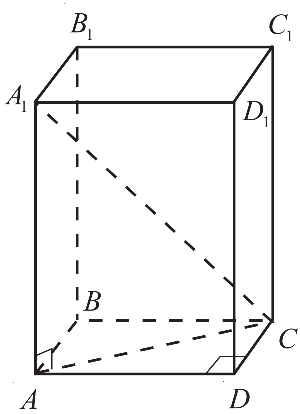


Fig. 7

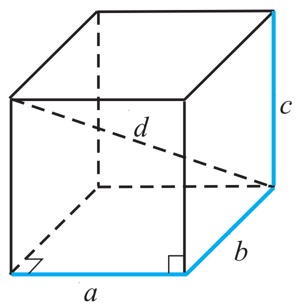


Fig. 8

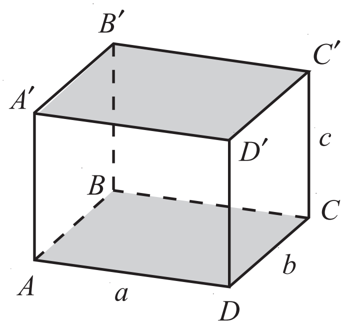


Fig. 9

2.2. Aria laterală, aria totală și volumul prismei

4 a) Reprezentați desfăşurarea paralelipipedului dreptunghic din figura 9.
b) Determinați aria suprafeței laterale şi aria suprafeței totale a paralelipipedului.

Rezolvare:

a) În figura 10 este reprezentată desfăşurarea paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$.

b) Fie $\mathcal{A}_l$ aria suprafeței laterale, iar $\mathcal{A}_t$ aria totală a paralelipipedului $ABCDA'B'C'D'$.

$\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_{AA'D'D} + \mathcal{A}_{DD'C'C} + \mathcal{A}_{CC'B'B} + \mathcal{A}_{BB'A'A} = ac + bc + ac + bc = 2ac + 2bc = 2c(a+b).$

$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_{ABCD} + \mathcal{A}_{A'B'C'D'} = \mathcal{A}_l + ab + ab = 2ac + 2bc + 2ab = 2(ac + bc + ab).$

Reuniunea fețelor laterale ale prismei se numeşte ***suprafață laterală*** a prismei.

Aria suprafeței laterale a prismei se numeşte ***arie laterală*** a prismei şi se notează cu $\mathcal{A}_l$.

Aria unei baze a prismei se notează cu $\mathcal{A}_b$.

Aria totală a prismei este suma dintre aria laterală şi ariile bazelor ei şi se notează $\mathcal{A}_t$.

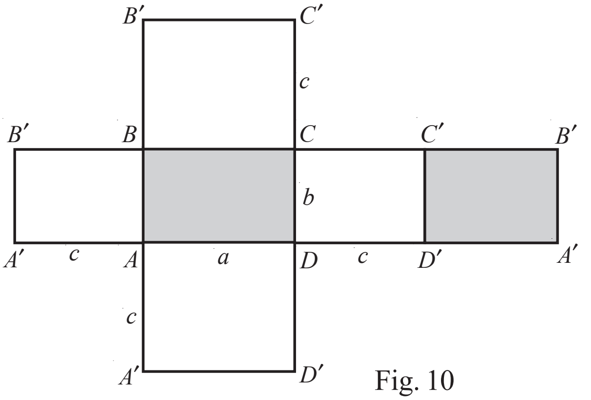
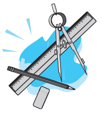


Fig. 10

Teorema 5

Aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a, b, c este $\mathcal{A}_t = 2(ab + ac + bc)$ (fig. 8).



Atelier. Confecționați din carton o prismă regulată hexagonală cu muchiile laterale de 9 cm şi laturile bazei de 5 cm.

Teorema 6

Aria laterală a unei prisme drepte este egală cu produsul dintre perimetrul bazei şi înălțimea prismei (sau lungimea muchiei laterale).

Să demonstrăm teorema 6.

Ipoteză:

Fie $a_1, a_2, ..., a_n$ laturile bazei unei prisme drepte, iar h – înălțimea prismei (fig. 11).

Concluzie:

$\mathcal{A}_l = p \cdot h$, unde $p = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Demonstrație:

① Fețele laterale ale unei prisme drepte sînt dreptunghiuri.

② $\mathcal{A}_l = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + ... + \mathcal{A}_n$, unde $\mathcal{A}_i$ este aria feței cu dimensiunile a_i şi h, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

③ $\mathcal{A}_i = a_i \cdot h$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$ (conform ① şi ②).

④ Substituind ③ în ②, obținem:

$$\mathcal{A}_l = a_1 \cdot h + a_2 \cdot h + ... + a_n \cdot h, \quad i \in \{1, 2, ..., n\},$$

$$\mathcal{A}_l = (a_1 + a_2 + ... + a_n) \cdot h = p \cdot h \quad \text{(c.c.t.d.)}.$$

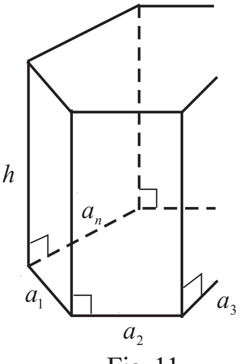


Fig. 11

5 Calculați volumul paralelipipedului dreptunghic cu dimensiunile $a=4$ cm, $b=3$ cm, $c=5$ cm.

Rezolvare:

Baza paralelipipedului cuprinde $4\cdot 3=12$ (pătrate), fiecare dintre ele cu aria de $1\ \text{cm}^2$ (fig. 12). Pe fiecare pătrat se poate aşeza cîte un cub cu muchia de 1 cm. Astfel, baza paralelipipedului va cuprinde 12 cuburi. Întrucît înălțimea acestui strat este de 1 cm, iar înălțimea paralelipipedului – de 5 cm, în paralelipiped încap 5 straturi. Prin urmare, volumul paralelipipedului dreptunghic este:

$$12\cdot 5=60\ (\text{cm}^3).$$

Răspuns: $60\ \text{cm}^3$.

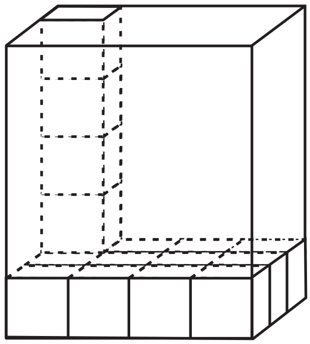


Fig. 12

Generalizînd rezultatul problemei, obținem

Teorema 7

Volumul paralelipipedului dreptunghic este egal cu produsul celor trei dimensiuni liniare ale acestuia: $\mathcal{V}=abc$ (fig. 13).

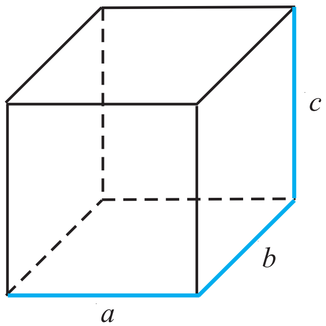


Fig. 13

Cum baza paralelipipedului dreptunghic este un dreptunghi, formula din teorema 7 poate fi rescrisă astfel:

$$\mathcal{V}=\mathcal{A}_b\cdot c \quad (*),$$

unde $\mathcal{A}_b=a\cdot b$ este aria bazei paralelipipedului.

Mai mult chiar, se poate demonstra că formula $(*)$ este adevărată pentru orice prismă.

Prin urmare, are loc

Teorema 8

Volumul prismei este egal cu produsul dintre aria bazei şi înălțimea prismei.

APLICĂM

6 O prismă dreaptă are bazele paralelograme cu o latură de 6 cm şi înălțimea dusă pe această latură de 4 cm. Înălțimea prismei este de 14 cm. Aflați volumul prismei.

Rezolvare:

Fie $ABCDA'B'C'D'$ prisma dată (fig. 14). Atunci $\mathcal{V}_{pr.}=\mathcal{A}_{ABCD}\cdot h$, unde h este înălțimea prismei.

$\mathcal{A}_{ABCD}=BM\cdot AD=6\cdot 4=24\ (\text{cm}^2).$

$\mathcal{V}_{pr.}=24\cdot 14=336\ (\text{cm}^3).$

Răspuns: $336\ \text{cm}^3$.

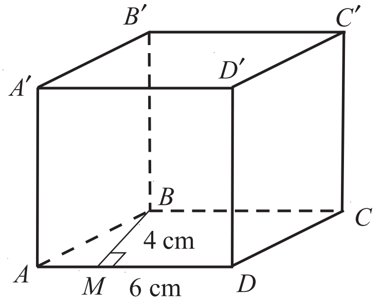


Fig. 14

7 Rezolvarea problemei **1** (de la începutul paragrafului):

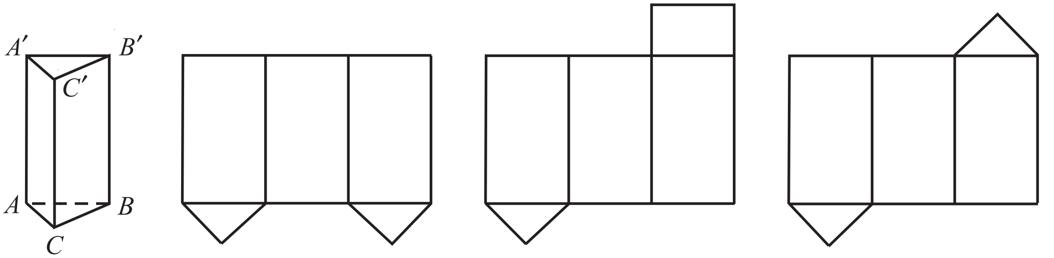
Capacitatea piscinei este egală cu volumul unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile de 5 m, 10 m şi 2 m. Deci, $\mathcal{V} = 5\text{ m} \cdot 10\text{ m} \cdot 2\text{ m} = 100\text{ m}^3$.

Răspuns: 100 m^3.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Recunoaşteţi desfăşurările corecte ale prismei triunghiulare.



a) b) c)

2. Ilustraţi desfăşurarea unei prisme triunghiulare regulate drepte cu:
a) latura bazei de 2 cm şi înălţimea de 4 cm;
b) latura bazei de 3 cm şi înălţimea de 2 cm.

3. Copiaţi tabelul şi completaţi cu *Da* doar dacă corpul geometric are proprietatea respectivă.

	Prisma patrulateră (arbitrară)	Prisma patrulateră dreaptă	Prisma patrulateră regulată	Paraleli-piped (arbitrar)	Paraleli-piped drept (arbitrar)	Paraleli-piped dreptun-ghic	Cub
Are bazele patru-latere	Da	Da	Da	Da	Da	Da	Da
Are muchiile late-rale perpendiculare pe baze		Da			Da		
Are bazele para-lelograme							
Are bazele drept-unghiuri							
Are fețele laterale paralelograme							
Are bazele pătrate							
Are fețele laterale pătrate							

4. Aflaţi aria totală şi volumul unui paralelipiped dreptunghic cu laturile bazei de 6 cm, 7 cm şi înălţimea de 5 cm.

5. Determinaţi aria laterală, aria totală şi lungimea diagonalei unui paralelipiped dreptunghic cu o latură a bazei de 8 cm, aria bazei de 40 cm^2 şi volumul de 240 cm^3.

Formăm capacitățile și aplicăm

6. Aflați aria totală a unui paralelipiped dreptunghic cu o latură a bazei de 4 cm, aria bazei de 24 cm^2 şi volumul egal cu 168 cm^3.

7. Perimetrul bazei unui paralelipiped dreptunghic este de 40 cm, iar aria lui laterală – de 400 cm^2. Determinați volumul paralelipipedului, ştiind că lungimea bazei este cu 4 cm mai mare decît lățimea ei.

8. Un paralelipiped dreptunghic cu laturile bazei de 3 cm şi 5 cm are volumul de 90 cm^3. Aflați aria laterală şi aria totală a paralelipipedului.

9. Determinați aria laterală şi volumul unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 6 cm şi înălțimea de 7 cm.

10. Volumul unei prisme triunghiulare regulate este de 36 cm^3. Aflați aria laterală şi aria totală a prismei, dacă latura bazei este de 4 cm.

11. Toate muchiile unei prisme triunghiulare drepte au lungimea egală cu $2\sqrt{3}$ cm. Aflați volumul prismei.

12. O prismă triunghiulară regulată are aria bazei de $16\sqrt{3}$ cm^2. Aflați aria totală şi volumul prismei, dacă se ştie că înălțimea prismei este de două ori mai mică decît lungimea laturii bazei.

13. Ştiind că latura bazei unei prisme triunghiulare regulate este de 3 cm şi aria laterală de 45 cm^2, aflați volumul acestei prisme.

14. Perimetrul bazei unei prisme triunghiulare regulate este de 15 cm. Determinați aria totală şi volumul prismei, dacă înălțimea prismei este de 7 cm.

15. Diagonalele a 3 fețe diferite ale unui paralelipiped dreptunghic au lungimile egale respectiv cu 1 cm, 2 cm, 3 cm. Aflați lungimea diagonalei paralelipipedului.

16. Determinați aria laterală, aria totală şi volumul unei prisme patrulatere regulate cu latura bazei de 4 cm şi înălțimea de 7 cm.

17. Determinați volumul unei prisme patrulatere regulate cu aria bazei de 25 cm^2 şi aria laterală de 160 cm^2.

18. O prismă patrulateră regulată are latura bazei de 6 cm şi volumul de 432 cm^3. Determinați aria laterală şi aria totală a prismei.

19. O bară metalică are forma unei prisme triunghiulare regulate cu lungimea laturii bazei de 10 cm şi înălțimea de 1 m. Determinați masa barei, ştiind că densitatea metalului este de 7 600 kg/m^3.

20. Diagonala feței laterale a unei prisme patrulatere regulate este de 13 cm. Ştiind că aria bazei este de 25 cm^2, determinați volumul şi aria totală a prismei.

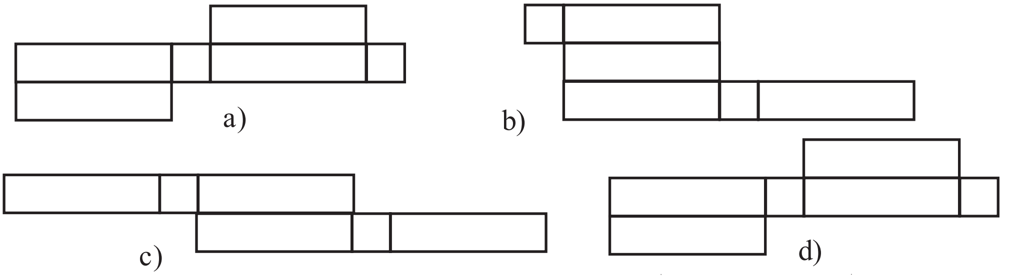
21. Volumul unei prisme patrulatere regulate este de 128 cm^3, iar înălțimea ei – de 8 cm. Determinați aria laterală şi aria totală a prismei.

22. Latura bazei unei prisme hexagonale regulate este de 3 cm, iar înălțimea prismei – de 5 cm. Aflați aria laterală, aria totală şi volumul prismei.

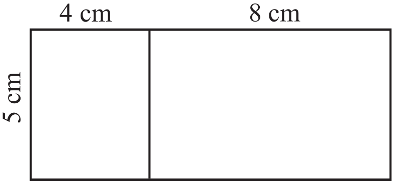
23. Determinați aria totală a unei prisme hexagonale regulate cu aria bazei de $54\sqrt{3}$ cm^2 şi volumul de 324 cm^3.

24. Aflați volumul unei prisme hexagonale regulate cu înălțimea de 5 cm şi aria laterală de 120 cm^2.

25. Care din următoarele imagini nu poate fi desfăşurarea unui paralelipiped dreptunghic?



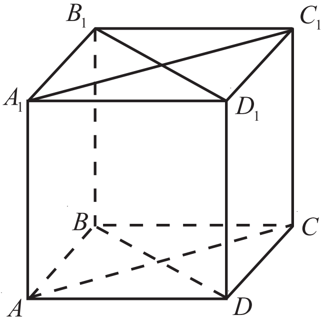
26. În imagine sînt reprezentate doar două fețe din desfăşurarea unui paralelipiped dreptunghic. Aflați volumul paralelipipedului.



27. Diagonalele fețelor unui paralelipiped dreptunghic au lungimile de $\sqrt{41}$ cm, $4\sqrt{26}$ cm şi respectiv $5\sqrt{17}$ cm. Aflați raportul dintre volumul paralelipipedului şi lungimea diagonalei lui.

28. Perimetrul bazei unei prisme hexagonale regulate este de 18 cm, iar aria ei laterală – de $162\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. Calculați volumul acestei prisme.

29. Fie prisma $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (vezi desenul). Aflați aria ei laterală dacă $\mathcal{A}_{AA_1C_1C} = 3\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_{BB_1D_1D} = 4\ \text{cm}^2$.



30. Aflați aria laterală şi aria totală a unei pisme hexagonale regulate cu latura bazei de 2 cm şi volumul de $60\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

31. Fețele unui paralelipiped dreptunghic au ariile respectiv egale cu $6\ \text{m}^2$, $6\ \text{m}^2$ şi $4\ \text{m}^2$. Aflați volumul paralelipipedului.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

32. Un bidon de forma unui paralelipiped dreptunghic, cu dimensiunile de 10 cm, 15 cm şi 20 cm, este plin cu apă. El se goleşte într-un vas cubic cu muchia de 50 cm. Pînă la ce înălțime se ridică apa?

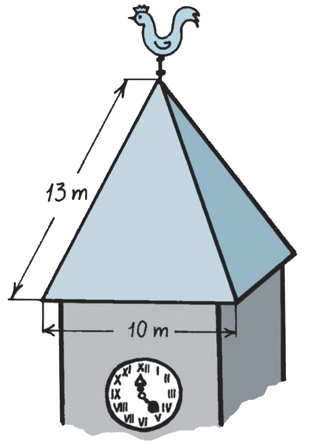
33. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile proporționale cu numerele 2, 3, 5 şi volumul de 240 cm³. Aflați:
a) diagonala paralelipipedului; b) aria totală a paralelipipedului.

34. O cutie are forma unui paralelipiped dreptunghic, notat $ABCDA'B'C'D'$. O furnică porneşte din punctul A şi merge pe suprafața laterală a cutiei pînă în punctul C' pe drumul cel mai scurt. Ştiind că $AB = 8$ cm, $BC = 4$ cm şi $AA' = 12\sqrt{3}$ cm, aflați:
a) aria laterală, aria totală şi volumul paralelipipedului; b) lungimea drumului.

35. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu latura bazei $AB = 8$ cm şi diagonala feței laterale de 10 cm. Calculați aria totală a prismei şi volumul ei.

* Opțional

§ 3. Piramida



1 Acoperişul unui turn are forma unei piramide patrulatere cu bazele congruente de 10 m şi muchiile laterale congruente de 13 m. Cîte cutii cu vopsea sînt necesare pentru acest acoperiş, dacă o cutie ajunge pentru o suprafaţă de 10 m^2?

Pentru a rezolva problema, vom studia o altă clasă specială de poliedre, numite *piramide*.

3.1. Elementele piramidei. Clasificarea piramidelor

Definiţie

Piramida este un poliedru format dintr-o suprafaţă poligonală, numită **baza piramidei**, un punct care nu aparţine bazei, numit **vîrful piramidei**, şi toate segmentele cu o extremitate în vîrful piramidei, iar cealaltă aparţinînd bazei.

Segmentul cu o extremitate în vîrful piramidei, cealaltă aparţinînd planului bazei şi perpendicular pe această bază se numeşte ***înălţime*** a piramidei. Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălţime*** a piramidei.

Feţele laterale ale piramidei sînt triunghiuri cu un vîrf în vîrful piramidei. Segmentele ce unesc vîrful piramidei cu vîrfurile bazei se numesc ***muchii laterale*** ale piramidei.

Mulţimea punctelor piramidei care nu aparţin bazei şi nici feţelor laterale se numeşte ***interiorul piramidei***.

De regulă, notînd piramida, scriem la început litera de la vîrful piramidei, apoi literele vîrfurilor bazei acesteia.

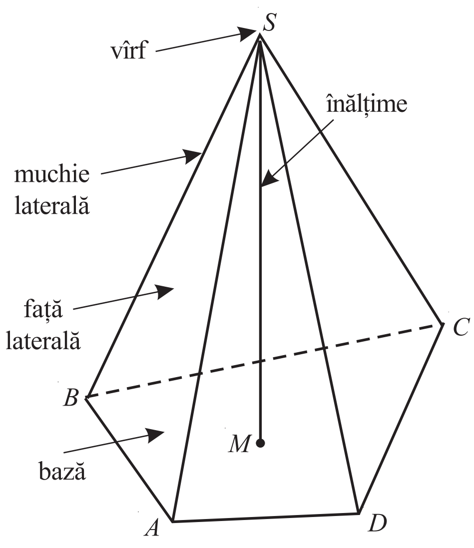


Fig. 15

Exemplu

Piramida din figura 15 poate fi notată $SABCD$.

$ABCD$ este baza, S – vîrful, ABS – o faţă laterală, $[SB]$ – o muchie a acestei piramide.

Dacă $[SM]$ este perpendicular pe bază, atunci $[SM]$ este înălţimea piramidei $SABCD$.

Dacă piciorul înălţimii piramidei coincide cu centrul bazei (punctul egal depărtat de vîrfurile bazei), atunci piramida se numeşte ***piramidă dreaptă***.

• Utilizînd teorema lui Pitagora, demonstraţi

Teorema 9

Muchiile laterale ale unei piramide drepte sînt congruente.

Piramidele se clasifică după poligoanele bazei: *piramide triunghiulare* (*tetraedre*), *patrulatere*, *pentagonale*, *hexagonale*, *heptagonale* etc.

O piramidă dreaptă cu baza un poligon regulat se numeşte ***piramidă regulată***.

Înălţimea unei feţe laterale trasată din vîrful piramidei regulate se numeşte ***apotemă*** a acestei piramide.

• În pofida faptului că piramidele triunghiulare se mai numesc ***tetraedre***, termenul *tetraedru regulat* nu se utilizează în cazul oricărei piramide triunghiulare regulate.

Definiţie

Un tetraedru cu toate muchiile congruente se numeşte **tetraedru regulat**.

• Formulaţi cîteva caracteristici sau proprietăţi ale tetraedrului regulat.

Exemplu

Feţele tetraedrului regulat sînt triunghiuri echilaterale congruente.

2 Cum reprezentăm corect o piramidă?

① Construim cu rigla şi creionul baza piramidei (fig. 16).

② Construim vîrful piramidei. În cazul piramidei regulate, găsim centrul bazei, apoi, pe verticala construită din acest punct, marcăm vîrful piramidei.

③ Unim vîrful piramidei cu vîrfurile bazei.

④ „Întrerupem” muchiile care nu se văd în spaţiu şi ştergem liniile auxiliare.

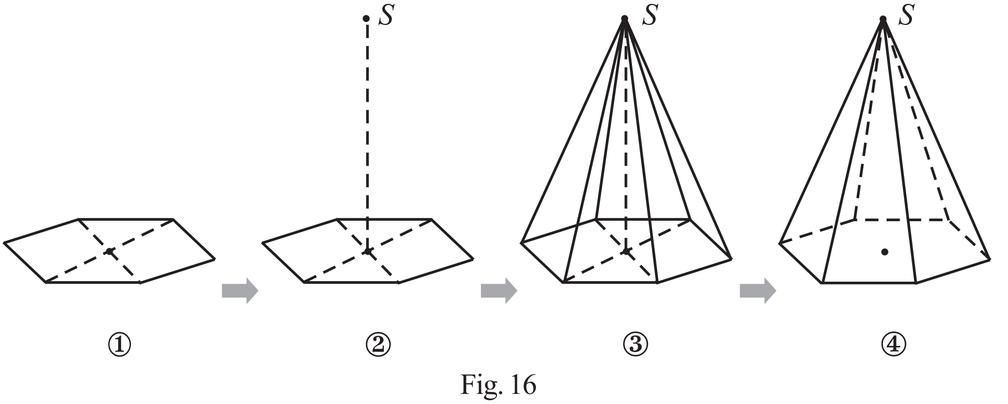


Fig. 16

3.2. Aria laterală, aria totală și volumul piramidei

3 a) În figura 17 este reprezentată piramida regulată $SABCD$. Construiţi schematic desfăşurarea ei.

b) Determinaţi aria laterală a piramidei $SABCD$, dacă latura bazei este a, iar apotema piramidei este l.

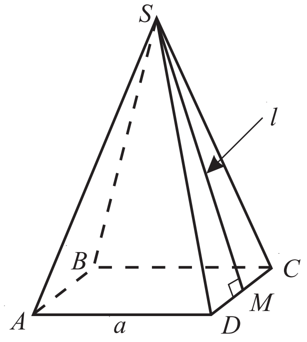


Fig. 17

Rezolvare:

a) În figura 18 este reprezentată desfăşurarea piramidei $SABCD$.

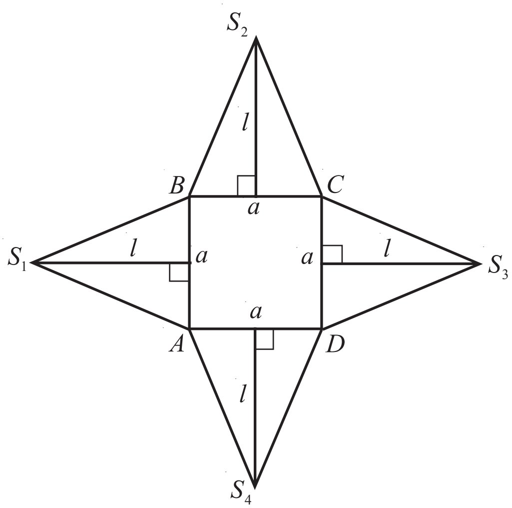


Fig. 18

Evident, triunghiurile AS_1B, BS_2C, CS_3D, DS_4A sînt triunghiuri isoscele şi congruente între ele.

b) Aria laterală ($\mathcal{A}_l$) a piramidei este egală cu suma ariilor triunghiurilor isoscele din figura 18.

$$\mathcal{A}_{AS_1B} = \frac{1}{2}a \cdot l.$$

Deci, $\mathcal{A}_l = 4 \cdot \frac{1}{2}al = 2al.$

Răspuns: $\mathcal{A}_l = 2al.$

Observație. Cum $p = 4a$ este egal cu perimetrul bazei piramidei, răspunsul problemei poate fi scris şi astfel: $\mathcal{A}_l = \frac{1}{2}p \cdot l,$ unde p este perimetrul bazei piramidei.

Reuniunea fețelor laterale ale piramidei se numeşte ***suprafață laterală a piramidei***. Aria suprafeței laterale a piramidei se numeşte ***arie laterală*** a piramidei.
Aria totală a piramidei este suma dintre aria laterală şi aria bazei.

Teorema 10

Aria laterală a unei piramide regulate este egală cu semiprodusul dintre perimetrul bazei şi apotema piramidei (fig. 19).

$$\mathcal{A}_l = \frac{1}{2}p \cdot l,$$

unde p este perimetrul bazei.

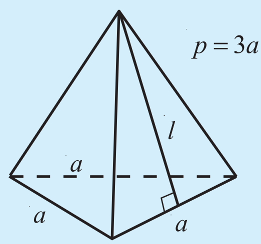


Fig. 19

APLICĂM

• Rezolvarea problemei **1**:

Pentru a afla suprafața acoperişului, trebuie să calculăm aria laterală a unei piramide patrulatere regulate $SABCD$ cu latura bazei de 10 m şi muchia laterală de 13 m (fig. 20).

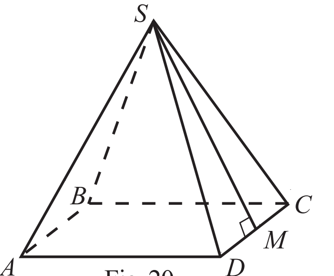


Fig. 20

Fie $[SM]$ apotema piramidei.

$SM=\sqrt{SD^2-DM^2}$, deoarece ΔSMD este dreptunghic în M.

$SM=\sqrt{13^2-5^2}=12(\text{m})$.

$\mathcal{A}_l=\frac{1}{2}p\cdot SM$, p este perimetrul bazei.

$\mathcal{A}_l=\frac{1}{2}\cdot 40\cdot 12=240(\text{m}^2)$. perimetrul bazei este egal cu 40 m.

$240:10=24$ (cutii).

Răspuns: 24 de cutii cu vopsea.

4 Care este volumul piramidei examinate în problema **1**?

Pentru a afla răspunsul, vom examina mai întîi următoarea teoremă.

Teorema 11

Volumul piramidei este egal cu o treime din produsul dintre aria bazei şi înălțimea piramidei.

APLICĂM

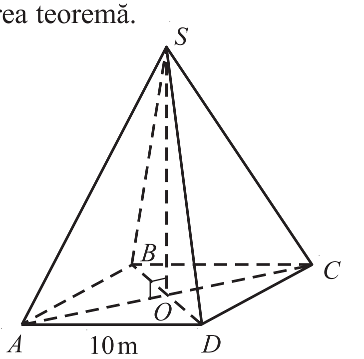


Fig. 23

• Rezolvarea problemei **4**:

Aflăm volumul piramidei patrulatere regulate $SABCD$ (fig. 23) cu latura bazei de 10 m şi muchia de 13 m.

① Fie O punctul de intersecție a diagonalelor bazei $ABCD$. Atunci $[SO]$ este înălțimea piramidei $SABCD$ deoarece $SABCD$ este o piramidă regulată.

② $AO=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt{2}=5\sqrt{2}\,(\text{m})$ deoarece diagonala pătratului cu latura a este egală cu $a\sqrt{2}$.

③ $SO=\sqrt{AS^2-AO^2}=\sqrt{169-50}=\sqrt{119}\,(\text{m})$ deoarece $[SO]$ este o catetă a triunghiului dreptunghic SOA.

④ $\mathcal{V}_{pir}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_b\cdot SO=\frac{1}{3}\cdot 10^2\cdot\sqrt{119}=\frac{100\sqrt{119}}{3}\,(\text{m}^3)$ conform teoremei 11.

Răspuns: $\frac{100\sqrt{119}}{3}\text{ m}^3$.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Aria bazei unei piramide triunghiulare regulate este egală cu $9\sqrt{3}$ cm^2, iar apotema piramidei – cu 5 cm. Aflați aria laterală a piramidei.

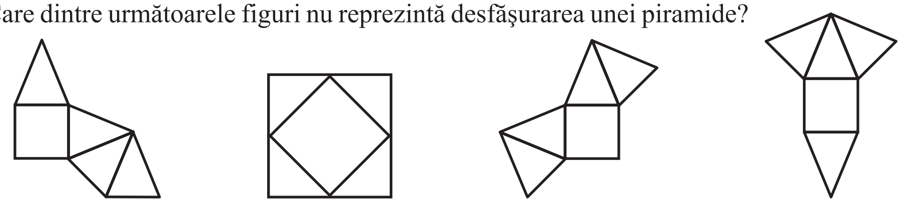
2. Perimetrul bazei unei piramide triunghiulare regulate este de $18\sqrt{3}$ cm, înălțimea – de 4 cm, iar apotema piramidei – de 5 cm. Determinați aria laterală, aria totală şi volumul piramidei.

3. Volumul unei piramide triunghiulare regulate este de $3\sqrt{3}$ cm^3, înălțimea ei – de 1 cm, iar apotema piramidei – de 2 cm. Aflați aria laterală a piramidei.

4. Aria bazei unei piramide triunghiulare regulate este de $36\sqrt{3}$ cm^2, apotema ei – de 4 cm, iar înălțimea piramidei – de 2 cm. Determinați aria totală şi volumul piramidei.

5. Calculați aria totală a unei piramide triunghiulare regulate cu apotema de 4 cm şi aria bazei de $27\sqrt{3}$ cm^2.

6. Care dintre următoarele figuri nu reprezintă desfăşurarea unei piramide?



a) b) c) d)

7. Apotema unei piramide patrulatere regulate este de 3 cm, înălțimea ei – de $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ cm, iar aria laterală – de 18 cm. Aflați volumul piramidei.

8. Determinați aria laterală şi volumul unei piramide patrulatere regulate cu latura bazei de 6 cm, apotema de 5 cm şi înălțimea de 4 cm.

9. Înălțimea unei piramide patrulatere regulate este de 12 cm, perimetrul bazei piramidei – de 40 cm, iar apotema ei – de 13 cm. Aflați aria totală şi volumul piramidei.

10. Aflați aria totală şi volumul unei piramide patrulatere regulate cu aria bazei de 36 cm^2, apotema de 6 cm şi înălțimea de $3\sqrt{3}$ cm.

11. Latura bazei unei piramide patrulatere regulate este de 8 cm, apotema ei – de 5 cm, iar înălțimea – de 3 cm. Determinați aria laterală, aria totală şi volumul piramidei.

12. Aflați aria totală şi volumul unei piramide hexagonale regulate cu latura bazei de 4 cm, înălțimea de 2 cm şi apotema de 4 cm.

Formăm capacitățile și aplicăm

13. Fie o piramidă patrulateră regulată cu latura bazei a, apotema l, perimetrul bazei $\mathcal{P}$, aria laterală $\mathcal{A}_l$ şi aria totală $\mathcal{A}$. Aflați:

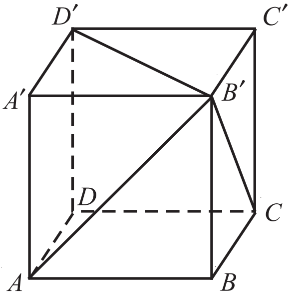
a) $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}_l$ şi $\mathcal{A}$, dacă $a = 6$ m, $l = 12$ m; b) l, $\mathcal{P}$ şi $\mathcal{A}_l$, dacă $a = 13$ m, $\mathcal{A} = 689$ m^2;

c) a, $\mathcal{P}$, $\mathcal{A}$, dacă $l = 16$ m, $\mathcal{A}_l = 288$ m^2; d) a, l, $\mathcal{A}$, dacă $\mathcal{P} = 44$ m, $\mathcal{A}_l = 396$ m^2;

e) a, k, $\mathcal{P}$, dacă $\mathcal{A}_l = 352$ m^2, $\mathcal{A} = 416$ m^2.

14. Aria bazei unei piramide hexagonale regulate este egală cu $48\sqrt{3}$ cm^2, iar apotema piramidei – cu 5 cm. Aflaţi aria laterală a piramidei.

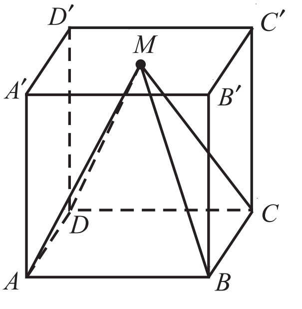
15. Piramida lui Kheops a avut iniţial înălţimea de 147,5 m şi latura pătratului bazei de 232 m. Raportul dintre lungimea apotemei VM şi segmentul OM, unde V este vîrful piramidei, iar O – centrul bazei, este un număr renumit, utilizat în arhitectură încă din Antichitate. Aflaţi acest raport şi comparaţi-l cu $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



16. Lungimea muchiei cubului din imagine este de $4\sqrt{3}$ cm. Determinaţi înălţimea tetraedrului $AA'D'B'$ ($A'D'B'$ este baza tetraedrului).

17. Volumul unei piramide hexagonale regulate este egal cu $48\sqrt{3}$ cm^3, înălţimea piramidei – cu 3 cm, iar apotema este congruentă cu latura bazei. Determinaţi aria totală a piramidei.

18. Aria laterală a unei piramide hexagonale regulate este egală cu 192 cm^2, înălţimea ei – cu 4 cm, iar apotema piramidei este congruentă cu latura bazei. Determinaţi volumul piramidei.



19. Lungimea muchiei cubului din imagine este de 16 cm. Vîrful M al piramidei $MABCD$ este centrul feţei $A'B'C'D'$ a cubului. Aflaţi raportul dintre aria laterală şi aria bazei piramidei.

20. Latura bazei unei piramide hexagonale regulate este congruentă cu înălţimea piramidei. Determinaţi aria laterală şi volumul piramidei, dacă înălţimea piramidei este de 10 cm, iar apotema ei – de $5\sqrt{7}$ cm.

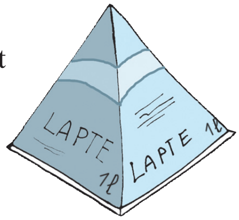
Dezvoltăm capacităţile şi creăm

21. Înălţimea unei piramide patrulatere regulate este de 8 cm, iar lungimea laturii bazei – de 12 cm. Aflaţi aria totală şi volumul piramidei.

22. Fie $ABCD$ un tetraedru regulat, $AB = 4$ cm şi G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor DBC, DAC şi respectiv DAB.
a) Aflaţi aria totală şi volumul tetraedrului.
b) Aflaţi raportul dintre aria triunghiului $G_1G_2G_3$ şi aria triunghiului ABC.

23. Înălţimea unui tetraedru regulat este de 8 cm. Aflaţi volumul tetraedrului.

§ 4. Trunchiul de piramidă



1 Un pachet piramidal, plin cu lapte şi aşezat pe masă, a fost spart cu un cuţit la nivelul jumătăţii din înălţimea pachetului. Cît lapte va rămîne în pachet, dacă el are capacitatea de $1l$?

Rezolvare:

Considerăm că pachetul are forma unei piramide triunghiulare $SABC$ (fig. 24).

Rezolvarea problemei se poate face prin două metode.

Metoda I. Aflăm volumul corpului care se obţine din piramida $SABC$ după înlăturarea piramidei $SA_1B_1C_1$ cu baza $A_1B_1C_1$ paralelă bazei ABC şi care intersectează înălţimea SO în mijlocul ei – punctul O_1.

Metoda II. Aflăm mai întîi cu cît s-a micşorat capacitatea pachetului, adică volumul piramidei $SA_1B_1C_1$.

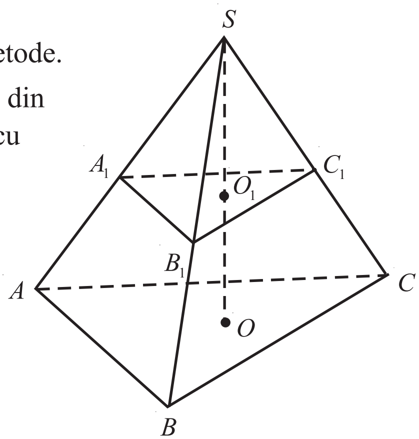


Fig. 24

Volumul piramidei $SABC$ se calculează după formula $\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_B\cdot h$, unde $\mathcal{A}_B$ este aria bazei ABC, iar h este înălţimea acestei piramide.

Volumul piramidei $SA_1B_1C_1$ este $\mathcal{V}_1=\frac{1}{3}\mathcal{A}_b\cdot h_1$, unde $\mathcal{A}_b$ este aria bazei $A_1B_1C_1$, iar $h_1=\frac{h}{2}$.

Utilizînd asemănarea triunghiurilor, se poate arăta că $\mathcal{A}_b=\frac{1}{4}\mathcal{A}_B$.

Prin urmare, $\mathcal{V}_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\mathcal{A}_B\frac{h}{2}=\frac{\mathcal{A}_B h}{24}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\mathcal{A}_B h=\frac{1}{8}\mathcal{V}$.

Deci, volumul corpului $ABCA_1B_1C_1$ este $\mathcal{V}-\mathcal{V}_1=\mathcal{V}-\frac{1}{8}\mathcal{V}=\frac{7}{8}\mathcal{V}$.

Prin urmare, în cutie vor rămîne $\frac{7}{8}\,l$ de lapte.

Răspuns: $\frac{7}{8}\,l$.

Observaţie. Mai tîrziu vom rezolva această problemă şi prin ***Metoda I***. Pentru aceasta vom studia un alt tip de poliedre – ***trunchiurile de piramidă***.

4.1. Elementele trunchiului de piramidă

Un plan care este paralel cu planul bazei piramidei şi intersectează piramida, o împarte în două poliedre – un ***trunchi de piramidă*** şi o piramidă mai mică.

Feţele paralele ale trunchiului de piramidă se numesc ***baze***.

Orice segment cu extremităţile aparţinînd bazelor trunchiului de piramidă şi perpendicular pe ele se numeşte ***înălţime*** a trunchiului de piramidă. Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălţime***.

Bazele trunchiului de piramidă sînt poligoane asemenea. Fețele laterale sînt trapeze.

De regulă, notînd trunchiul de piramidă, scriem la început literele bazei mari, apoi literele bazei mici.

Exemplu

Trunchiul de piramidă din figura 25 poate fi notat $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$. Poligoanele $ABCDE$ şi $A_1B_1C_1D_1E_1$ sînt respectiv baza mare şi baza mică, AA_1E_1E – o față laterală, iar $[MM_1]$ – o apotemă a acestui trunchi de piramidă.

Dacă $[OO_1]$ este perpendicular pe baze, atunci $[OO_1]$ este o înălțime a trunchiului de piramidă.

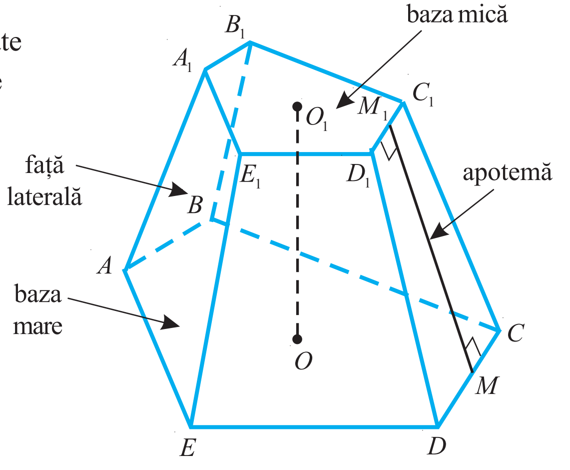


Fig. 25

Segmentul cu extremitățile în centrele bazelor unui ***trunchi de piramidă dreaptă*** este înălțimea acestui trunchi.

Trunchiul de piramidă regulată este un trunchi de piramidă dreaptă cu bazele poligoane regulate. Fețele ei laterale sînt trapeze congruente.

Înălțimile fețelor laterale ale unui trunchi de piramidă regulată se numesc ***apotemele*** trunchiului de piramidă.

Trunchiurile de piramidă se clasifică după poligoanele bazelor: *trunchiuri de piramide triunghiulare*, *patrulatere*, *pentagonale*, *hexagonale*, *heptagonale* etc.

Trunchiul de piramidă este desfăşurabil.

2 Cum reprezentăm corect un trunchi de piramidă?

① Construim cu rigla şi creionul o piramidă (fig. 26; vezi § 3).

② Marcăm pe o muchie laterală un punct şi din acel punct construim un poligon cu laturile respectiv paralele cu laturile bazelor piramidei.

③ Cu guma ştergem muchiile laterale ale piramidei mai mici.

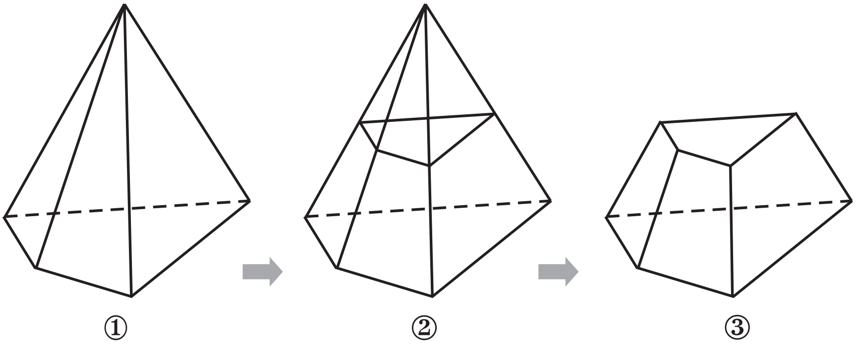


Fig. 26

3 (opțional). Determinați volumul unui trunchi de piramidă, fiind date ariile $\mathcal{A}_B$ și $\mathcal{A}_b$ ale bazelor și înălțimea h a trunchiului.

Rezolvare:

Fie x înălțimea piramidei de la care provine trunchiul (fig. 27).

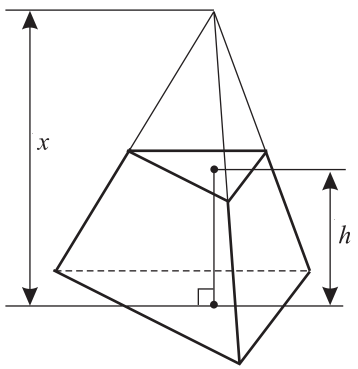


Fig. 27

Volumul $\mathcal{V}$ al trunchiului de piramidă este egal cu diferența volumelor a două piramide: una cu aria bazei $\mathcal{A}_B$ și înălțimea x, alta – cu aria bazei $\mathcal{A}_b$ și înălțimea $x-h$.

Din asemănarea acestor piramide rezultă că $\frac{\mathcal{A}_b}{\mathcal{A}_B}=\left(\frac{x-h}{x}\right)^2$. De aici $x=\frac{h\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}-\sqrt{\mathcal{A}_b}}$.

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\mathcal{A}_B x-\frac{1}{3}\mathcal{A}_b(x-h)=\frac{1}{3}\left[\mathcal{A}_B\cdot\frac{h\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}-\sqrt{\mathcal{A}_b}}-\mathcal{A}_b\left(\frac{h\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}-\sqrt{\mathcal{A}_b}}-h\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{3}h\left(\mathcal{A}_B\frac{\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}-\sqrt{\mathcal{A}_b}}-\mathcal{A}_b\frac{\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}-\sqrt{\mathcal{A}_b}}+\mathcal{A}_b\right)=$$

$$=\frac{1}{3}h\left[(\mathcal{A}_B-\mathcal{A}_b)\frac{\sqrt{\mathcal{A}_B}}{\sqrt{\mathcal{A}_B}-\sqrt{\mathcal{A}_b}}+\mathcal{A}_b\right]=$$

$$=\frac{1}{3}h[(\sqrt{\mathcal{A}_B}+\sqrt{\mathcal{A}_b})\cdot\sqrt{\mathcal{A}_B}+\mathcal{A}_b]=\frac{1}{3}h(\mathcal{A}_B+\sqrt{\mathcal{A}_B\mathcal{A}_b}+\mathcal{A}_b).$$

Răspuns: $\frac{1}{3}h(\mathcal{A}_B+\sqrt{\mathcal{A}_B\mathcal{A}_b}+\mathcal{A}_b)$.

APLICĂM

• *Rezolvarea prin metoda I a problemei* **1** (de la începutul paragrafului):

Fie $\mathcal{V}$ volumul trunchiului, H înălțimea piramidei. Atunci

$$\mathcal{A}_b=\frac{1}{4}\mathcal{A}_B,\quad h=\frac{H}{2}\quad (*).$$

Substituind $(*)$ în formula-răspunsul problemei **3**, obținem

$$\mathcal{V}=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\left(\mathcal{A}_B+\sqrt{\mathcal{A}_B\cdot\frac{1}{4}\mathcal{A}_B}+\frac{1}{4}\mathcal{A}_B\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{H}{2}\left(\mathcal{A}_B+\frac{1}{2}\mathcal{A}_B+\frac{1}{4}\mathcal{A}_B\right)=\frac{1}{3}\cdot H\cdot\frac{7}{8}\mathcal{A}_B=\frac{7}{8}\mathcal{V}_p,$$

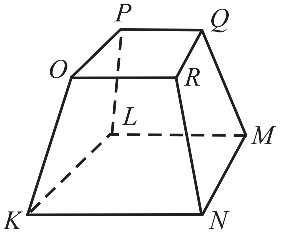
unde $\mathcal{V}_p$ este volumul piramidei. Prin urmare, în pachet vor rămîne $\frac{7}{8}\,l$ de lapte.

Exerciții și probleme

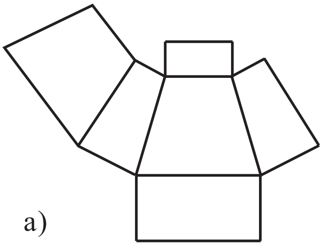
Fixăm cunoștințele

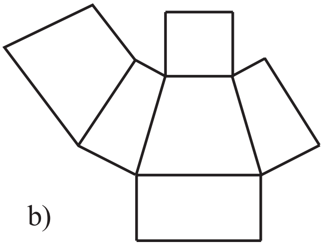
1. Reprezentați un trunchi de piramidă:
a) triunghiulară;
b) patrulateră;
c) pentagonală.

2. În figură este reprezentat un trunchi de piramidă. Identificați:
a) bazele;
b) fețele laterale;
c) muchiile laterale.



3. Luînd în considerație proprietățile ce țin de bazele şi fețele laterale ale unui trunchi de piramidă, stabiliți care dintre următoarele reprezentări poate fi desfăşurarea unui trunchi de piramidă patrulateră.

a) 

b) 

4. Ilustrați desfăşurarea unui trunchi de piramidă:
a) triunghiulară regulată;
b) patrulateră cu bazele paralelograme;
c) patrulateră cu bazele trapeze.

5. Un poliedru are (numai) două fețe paralele, celelalte fiind trapeze. Decideți dacă poliedrul este trunchi de piramidă, ştiind că cele două fețe paralele sînt:
a) triunghiuri asemenea; b) triunghiuri echilaterale;
c) pătrate; d) poligoane regulate cu acelaşi număr de laturi.

Formăm capacitățile și aplicăm

6. Lungimea muchiei laterale a unui trunchi de piramidă patrulateră este de 26 cm. Aflați înălțimea trunchiului, dacă lungimile diagonalelor bazelor triunghiului sînt de 30 cm şi 10 cm.

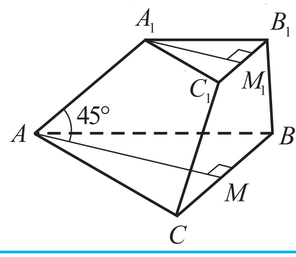
7. Aflați lungimea muchiei laterale a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu laturile bazelor de 10 cm şi 4 cm şi apotema trunchiului de 4 cm.

8. Lungimea muchiei laterale a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată este de 9 cm. Determinați înălțimea trunchiului, dacă laturile bazelor sînt de 10 cm şi 2 cm.

9. Înălțimea unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată este de 10 cm. Aflați lungimea muchiei laterale, dacă laturile bazelor sînt de 40 cm şi 10 cm.

10. Determinați înălțimea unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu latura bazei mari de 25 cm, muchia laterală de 26 cm şi apotema trunchiului de 24 cm.

11. Aflați înălțimea unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu laturile bazelor de 10 cm şi 6 cm şi diagonala trunchiului de 12 cm.

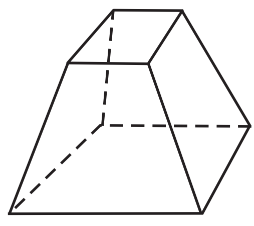


12. Muchia laterală a unui trunchi de piramidă triunghiulară regulată formează cu o înălțime a bazei mari un unghi de 45° (vezi desenul). Aflați aria figurii AA_1M_1M, dacă laturile bazelor trunchiului sînt de 10 cm şi 6 cm.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

13. Muchia laterală a unui trunchi de piramidă patrulateră regulată formează cu o diagonală a bazei mari un unghi de 45°. Aflați lungimea diagonalei trunchiului de piramidă, dacă laturile bazelor sînt de 24 cm şi 7 cm.

14. Aflați înălțimea unui trunchi de piramidă patrulateră regulată cu laturile bazelor de 8 cm şi 2 cm şi aria patrulaterului cu vîrfurile-extremități ale diagonalelor paralele ale bazelor trunchiului egală cu $20\sqrt{2}$ cm^2.



15. Examinați desenul. Cu ajutorul riglei negradate stabiliți dacă trunchiul de piramidă este reprezentat corect.

16*. Calculați înălțimea unui trunchi de piramidă hexagonală regulată cu latura bazei mici de 4 cm, latura bazei mari de 12 cm şi volumul de 936 cm^3.

17*. Demonstrați că aria suprafeței laterale a unui trunchi de piramidă regulată este egală cu produsul dintre semisuma perimetrelor bazelor şi apotema trunchiului.

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. Aflați suma măsurilor unghiurilor formate de fețele unei:
a) piramide triunghiulare; b) prisme patrulatere; c) prisme pentagonale.

2. Determinați înălțimea unui tetraedru regulat cu muchia de 10 cm.

3. Aflați volumul unui tetraedru regulat cu muchia de 8 cm.

4. Dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic sînt de 7 cm, 4 cm, 8 cm. Determinați aria totală şi volumul paralelipipedului.

5. Volumul unui cub este de 216 cm^3. Aflați aria totală a cubului.

6. O prismă triunghiulară regulată are muchia bazei de 4 cm şi înălțimea de 8 cm. Determinați aria laterală şi volumul ei.

7. O prismă hexagonală regulată are muchia bazei de 2 cm, iar fețele laterale sînt pătrate. Aflați aria laterală şi volumul prismei.

8. Fie $ABCDEF$ o prismă dreaptă cu baza ABC triunghi dreptunghic. Înălțimea prismei este congruentă cu ipotenuza AC a bazei şi $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm. Determinați:
a) aria totală şi volumul prismei;
b) aria triunghiului EBM, unde M este mijlocul muchiei AC.

* Opțional

9. Cîte diagonale are un trunchi de piramidă:
a) pentagonală; b) ale cărui baze sînt poligoane cu n laturi?

10. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Ştiind că distanța dintre centrele a două fețe laterale este de 4 cm şi aria laterală – de $96\sqrt{3}$ cm^2, aflați:
a) înălțimea prismei; b) volumul prismei.

11. Toate muchiile prismei regulate $ABCA'B'C'$ sînt de 3 cm. Determinați lungimea segmentului AD, unde D este mijlocul muchiei $B'C'$.

12. Un paralelipiped dreptunghic are dimensiunile bazei de 15 cm şi 5 cm, iar aria lui laterală este de două ori mai mare decît aria bazei. Aflați înălțimea şi volumul paralelipipedului.

13. Fie un cub cu diagonala de 3 cm. Unind centrul cubului cu vîrfurile lui, se obțin 6 piramide congruente. Ce volum are fiecare dintre aceste piramide?

14. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară. Triunghiul ABC are două laturi de 17 cm şi 24 cm, iar măsura unghiului format de ele este de 30°. Ştiind că înălțimea prismei este de 12 cm, aflați volumul ei.

Formăm capacitățile și aplicăm

15. Suma dimensiunilor unui paralelipiped dreptunghic este egală cu 24 cm, lungimea diagonalei – cu 18 cm. Determinați aria totală a paralelipipedului.

16. Fie cubul $ABCDA'B'C'D'$, M – mijlocul lui $[A'D']$, iar P – mijlocul lui $[AB]$. Ştiind că $MP = 4\sqrt{3}$ cm, aflați lungimea muchiei şi volumul cubului.

17. Suma muchiilor concurente într-un singur vîrf al unui paralelipiped dreptunghic este de 15 cm, iar diagonala lui – de $\sqrt{77}$ cm. Determinați aria totală a paralelipipedului.

18. Volumul unei prisme patrulatere regulate este de 175 cm^3, iar înălțimea ei – de 7 cm. Determinați lungimea diagonalei şi aria totală a prismei.

19. O prismă hexagonală regulată are muchia bazei de 6 cm şi înălțimea de 8 cm. Determinați lungimea diagonalelor prismei, aria totală şi volumul ei.

20. Fie paralelipipedul dreptunghic $ABCDA'B'C'D'$ cu $AB = 12$ cm, $BC = 35$ cm. Aria secțiunii determinate de muchiile AA' şi CC' este egală cu 370 cm^2. Determinați aria laterală şi volumul paralelipipedului.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

21. O suprafață de forma unui triunghi echilateral cu înălțimea de $4\sqrt{3}$ cm reprezintă desfăşurarea unui tetraedru. Determinați aria totală şi volumul tetraedrului.

22. Fie piramida triunghiulară regulată $VABC$ cu baza ABC şi $AB = 12\sqrt{2}$ cm, $AV = 12$ cm.
a) Aflați înălțimea triunghiului ABC. b) Determinați înălțimea piramidei.
c) Aflați volumul piramidei.

23. Un trunchi de piramidă patrulateră regulată provine dintr-o piramidă cu înălțimea de 12 cm şi latura bazei de 8 cm. Determinați lungimea muchiei laterale a trunchiului, ştiind că el are înălțimea de 4 cm.

24. Aria totală a unui tetraedru regulat este egală cu $6\sqrt{3}$ cm^2. Aflați volumul tetraedrului.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. Un vas de forma unui paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile bazei de 10 cm şi 15 cm şi înălţimea de 20 cm este plin cu apă.

a) Reprezentaţi desfăşurarea paralelipipedului la scara 1: 5. **3p**

b) Aflaţi aria laterală a paralelipipedului. **3p**

c) Cîţi litri de apă sînt în vas? **3p**

d) Apa din vas se toarnă într-un vas cubic cu muchia de 20 cm. La ce înălţime s-a ridicat apa în vasul cubic? **3p**

e) Aflaţi raportul dintre capacitatea vasului cubic şi a celui paralelipipedic. **3p**

2. Un corp metalic are forma unui tetraedru regulat.

a) Aflaţi lungimea unei muchii a tetraedrului, dacă suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 54 cm. **2p**

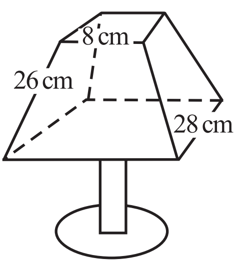
b) Reprezentaţi desfăşurarea tetraedrului. **3p**

c) Aflaţi suprafaţa totală a corpului. **3p**

d) Care este înălţimea tetraedrului? **3p**

e) Corpul a fost topit şi din metalul obţinut au fost create piese – tetraedre regulate cu muchia de 3 cm. Cîte piese au fost confecţionate? **3p**

3. Abajurul unei lămpi de masă de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată fără baze (vezi desenul) se confecţionează din pînză. Va ajunge oare o bucată de pînză de forma unui pătrat cu latura de 50 cm? **4p**



Varianta II

1. O vază de forma unei prisme triunghiulare regulate cu latura bazei de 12 cm şi înălţimea de 30 cm este pe jumătate plină cu apă.

a) Reprezentaţi desfăşurarea prismei la scara 1: 3.

b) Aflaţi aria laterală a prismei.

c) Cîţi litri de apă sînt în vază?

d) Apa din vază se toarnă într-un vas cubic cu muchia de 20 cm. La ce înălţime s-a ridicat apa în vasul cubic?

e) Aflaţi raportul dintre capacitatea vasului cubic şi a vazei.

2. Un corp metalic are forma unui tetraedru regulat.

a) Aflaţi lungimea unei muchii a tetraedrului, dacă suma lungimilor tuturor muchiilor este egală cu 72 cm.

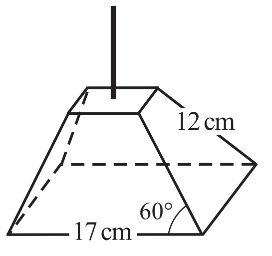
b) Reprezentaţi desfăşurarea tetraedrului.

c) Aflaţi suprafaţa totală a corpului.

d) Care este înălţimea tetraedrului?

e) Corpul a fost topit şi din metalul obţinut au fost create piese – tetraedre regulate cu muchia de 6 cm. Cîte piese au fost confecţionate?

3. O lustră de forma unui trunchi de piramidă patrulateră regulată fără baze (vezi desenul) se confecţionează din sticlă. Va ajunge oare o bucată de sticlă de forma unui pătrat cu latura de 50 cm?



Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	33–32	31–28	27–25	24–22	21–19	18–15	14–11	10–6	5–3	2–1

Capitolul 5

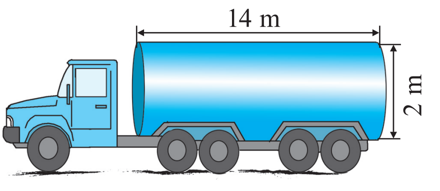
Corpuri rotunde

În practică, în afară de poliedre, se întîlnesc corpuri mărginite total sau parțial de suprafețe neplane: sfera, cilindrul, conul etc., numite **corpuri rotunde**. Ca şi în cazul poliedrelor, acestea au un şir de proprietăți interesante. De exemplu, dintre toate corpurile geometrice cu aceeaşi suprafață totală, sfera are volumul maxim.

Deoarece suprafețele corpurilor rotunde se obțin (după cum veți vedea) prin rotații complete ale unor figuri geometrice în jurul unei drepte, corpurile în cauză se mai numesc **corpuri de rotație**.

§ 1. Cilindrul (circular drept)

1 Administrația unei benzinării a hotărît să vopsească cele 10 cisterne (de formă cilindrică) ale automobilelor cu care se transportă carburanți. Fiecare cisternă are lungimea de 14 m şi diametrul bazei de 2 m. Cîte cutii de vopsea sînt necesare, dacă o cutie ajunge pentru o suprafață de 14 m^2?



1.1. Elementele cilindrului

Definiții

- Corpul geometric format din două discuri congruente, situate în plane paralele, şi din toate segmentele cu extremitățile aparținînd acestor discuri se numeşte **cilindru circular** (fig. 1).
- Cele două discuri ale cilindrului circular se numesc **baze ale cilindrului**.

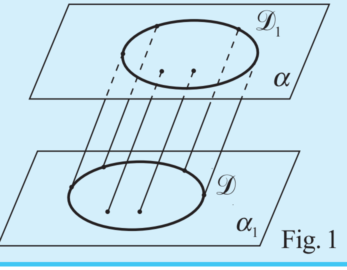


Fig. 1

Orice segment cu extremitățile în planele bazelor cilindrului, perpendicular pe ele, se numeşte ***înălțime*** a cilindrului. Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălțime***.

De exemplu, în figura 2 este reprezentat un cilindru cu bazele $\mathscr{D}(O, OM)$ şi $\mathscr{D}_1(O_1, O_1M_1)$.

Fie $\mathscr{C}$ şi $\mathscr{C}_1$ cercurile care mărginesc discurile $\mathscr{D}$ şi $\mathscr{D}_1$.

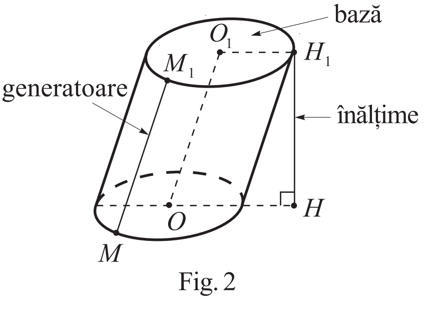


Fig. 2

Segmentele paralele cu dreapta OO_1, ale cărei extremități aparțin cercurilor $\mathscr{C}_1$ și $\mathscr{C}_2$, se numesc ***generatoare ale cilindrului***.

Astfel, în figura 2 segmentul MM_1 este o generatoare a cilindrului.

Mulțimea tuturor generatoarelor cilindrului se numește ***suprafața laterală*** a cilindrului, iar mulțimea punctelor lui, care nu aparțin bazelor și nici suprafeței laterale, se numește ***interiorul cilindrului***.

Dacă generatoarele unui cilindru circular sînt perpendiculare pe planele bazelor, atunci cilindrul se numește cilindru circular ***drept*** (fig. 3 a)), în caz contrar – cilindru circular ***oblic*** (fig. 3 b)).

Observăm că generatoarele cilindrului circular drept sînt înălțimi ale acestuia.

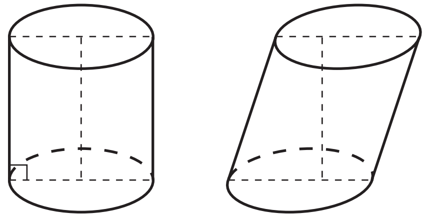


Fig. 3

Observații. **1.** În clasa a IX-a vom cerceta numai cilindrul circular drept, pe care îl vom numi, pe scurt, ***cilindru***.

2. În practică, mai frecvent se întîlnesc probleme ce țin de suprafața cilindrului. De aceea, pentru a scurta exprimarea, prin cilindru uneori vom înțelege numai suprafața sa.

2 Descrieți ce obțineți la rotația completă a dreptunghiului $ABCD$ în jurul dreptei AB.

Rezolvare:

La rotația completă a dreptunghiului $ABCD$ în jurul dreptei AB se obține un cilindru cu înălțimea AB și raza bazei AD (fig. 4).

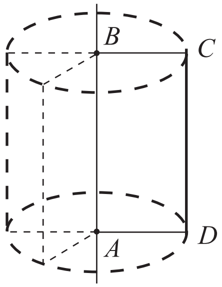


Fig. 4

1.2. Desfășurarea cilindrului. Secțiuni

1 Desfășurați un cilindru și examinați ce obțineți.

Rezolvare:

Tăind suprafața laterală a cilindrului după o generatoare, obținem o suprafață dreptunghiulară (fig. 5). Dimensiunile acestui dreptunghi sînt egale cu lungimea cercurilor bazelor și lungimea generatoarelor cilindrului. Prin urmare, desfășurarea cilindrului constă din două discuri de raze egale și o suprafață dreptunghiulară, avînd o dimensiune egală cu lungimea unuia dintre aceste discuri, iar alta – cu lungimea generatoarei lui.

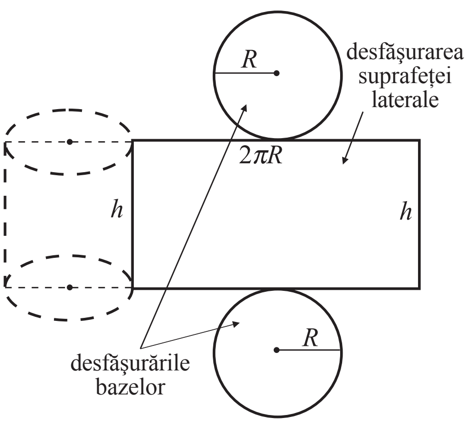
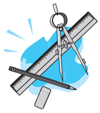


Fig. 5



Atelier. Confecționați din carton un cilindru circular drept cu înălțimea de 15 cm şi raza bazei de 5 cm.

2 Descrieți ce obțineți intersectînd cilindrul cu un plan ce conține centrele bazelor cilindrului.

Rezolvare:

Fie O_1 şi O_2 centrele bazelor cilindrului. Intersecția cilindrului cu un plan ce conține dreapta O_1O_2 este o suprafață dreptunghiulară *ABCD* cu dimensiunile egale cu înălțimea cilindrului şi diametrul bazelor (fig. 6).

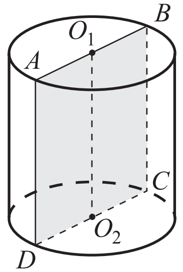


Fig. 6

Observație. Suprafața dreptunghiulară *ABCD* se numeşte ***secțiune axială*** a cilindrului, iar dreapta O_1O_2 – ***axa de simetrie*** a cilindrului.

APLICĂM

• Un cilindru circular drept cu raza bazei de 10 cm şi generatoarea de 16 cm este secționat paralel cu axa de simetrie a cilindrului (fig. 7). La ce distanță de la această dreaptă se află secțiunea, dacă aria ei este de 192 cm^2?

Rezolvare:

Secțiunea dată este o suprafață dreptunghiulară *ABCD*, avînd o dimensiune egală cu lungimea generatoarei cilindrului.

Deci, $\mathcal{A}_{ABCD} = AD \cdot DC \Rightarrow DC = \frac{\mathcal{A}_{ABCD}}{AD} = \frac{192}{16} = 12$ (cm).

Fie O_1M înălțimea triunghiului isoscel DO_1C cu $DO_1 = O_1C = 10$ cm.

O_1M este distanța de la axa O_1O_2 pînă la secțiune.

Astfel, $O_1M = \sqrt{DO_1^2 - \left(\frac{DC}{2}\right)^2} = \sqrt{100-36} = 8$ (cm).

Răspuns: 8 cm.

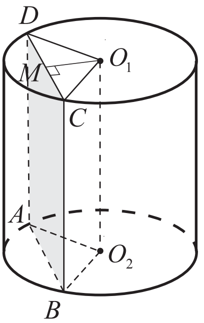


Fig. 7

1.3. Aria laterală, aria totală și volumul cilindrului

1 Fie *r* raza bazei unui cilindru, iar *h* lungimea generatoarei (înălțimea) lui. Aflați aria suprafeței laterale a cilindrului.

Rezolvare:

Deoarece desfăşurarea suprafeței laterale a cilindrului este o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile $2\pi r$ (lungimea bazei) şi *h*, rezultă că aria ei este $\boxed{\mathcal{A}_l = 2\pi rh}$.

Aria suprafeței laterale a cilindrului se numește ***aria laterală*** a cilindrului și se notează cu $\mathcal{A}_l$.

Aria totală ($\mathcal{A}_t$) a cilindrului este suma dintre aria laterală și ariile bazelor lui.

Cum aria unei baze este $\mathcal{A}_b = \pi r^2$, rezultă că aria totală a cilindrului este

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + 2\mathcal{A}_b = 2\pi rh + 2\pi r^2 = \boxed{2\pi r(h+r)}.$$

2 Calculați volumul:

a) unei prisme patrulatere regulate drepte de înălțime h și latura bazei a;

b) unui cilindru de înălțime h și raza bazelor r.

Rezolvare:

a) Volumul unei prisme este egal cu $\mathcal{A}_b \cdot h$, unde $\mathcal{A}_b$ este aria bazei, iar h – înălțimea ei. Prin urmare, $\mathcal{V} = a^2 \cdot h$.

b) Considerînd o prismă dreaptă cu bazele poligoane regulate cu un număr foarte mare de laturi, obținem un corp asemănător cu un cilindru (fig. 8).

Prin urmare, ca și la prisme, putem considera volumul cilindrului egal cu $\mathcal{A}_b \cdot h$. Deci, $\boxed{\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi r^2 h}$.

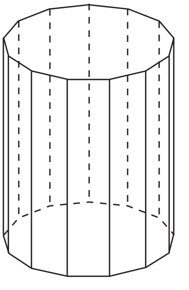


Fig. 8

Are loc

Teorema 1

Pentru orice cilindru circular drept, $\mathcal{A}_l = 2\pi rh$,

$$\mathcal{A}_t = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h+r),$$
$$\mathcal{V} = \mathcal{A}_b \cdot h = \pi r^2 h,$$

unde r, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ sînt respectiv raza bazei, înălțimea, aria laterală, aria bazei, aria totală și volumul cilindrului.

- *Rezolvarea problemei* **1** (de la începutul paragrafului):

Fie S suprafața unei cisterne, S_t suprafața tuturor cisternelor.

Atunci $S = 2\pi r(h+r)$, unde $h = 14$ m, $r = 1$ m.

$S \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 = 94{,}2$ (m^2).

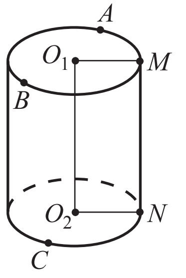
$S_t = 94{,}2 \cdot 10 = 942$ (m^2).

Cum $942 : 15 = 62{,}8$ și $62 < 62{,}8 < 63$, rezultă că sînt necesare 63 de cutii cu vopsea.

Răspuns: 63 de cutii.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele



1. Reprezentați un cilindru: a) circular drept; b) circular oblic. Numiți elementele lui.

2. În figură este reprezentat un cilindru circular drept de baze $\mathscr{C}(O_1, R)$, $\mathscr{C}(O_2, R)$. Identificați printre segmentele AO_1, BO_1, AB, $MN(MN \parallel O_1O_2)$, O_1O_2, CO_2, CN, O_2N:
a) generatoarele; b) înălțimile;
c) razele bazelor; d) coardele bazelor.

3. Fie o suprafață dreptunghiulară de dimensiunile l şi L. Reprezintă oare ea desfăşurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept de bază $\mathscr{C}(O_1, R)$ și generatoare G, dacă:

a) $L = 0{,}8\pi$, $l = \frac{2}{5}$, $R = 0{,}4$, $G = 0{,}4$; b) $L = \sqrt{12}$, $l = \frac{1}{3}$, $R = \frac{\sqrt{3}}{\pi}$, $G = 0{,}3$;

c) $L = 6\pi^2$, $l = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $R = 3\pi$, $G = \frac{\sqrt{2}}{2}$?

4. Fie un cilindru circular drept de baze $\mathscr{C}(O_1, R)$, $\mathscr{C}(O_2, R)$ și generatoare G, $h = O_1O_2$, $\mathscr{A}_b$, $\mathscr{A}_l$, $\mathscr{A}_t$, $\mathscr{V}$ – respectiv aria bazei, aria laterală, aria totală şi volumul cilindrului. Completați tabelul:

R	G	h	$\mathscr{A}_b$	$\mathscr{A}_l$	$\mathscr{A}_t$	$\mathscr{V}$
			16π	24π		
2,5		0,4				
		5				125π
$2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$					
		1			$1{,}5\pi$	

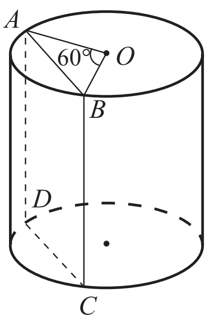
5. Secțiunea axială a unui cilindru este un pătrat de arie S. Aflați suprafața totală a cilindrului și volumul lui, dacă:
a) $S = 100$ cm²; b) $S = 4$ cm²; c) $S = 0{,}64$ cm².

6. Un dreptunghi cu laturile de 5 cm şi 8 cm se roteşte în jurul laturii mai mari. Determinați aria şi volumul corpului de rotație obținut.

7. Valoarea raportului dintre lungimile laturilor unui dreptunghi cu aria de 48 cm² este egală cu 0,75. Aflați volumul corpului obținut la rotația dreptunghiului în jurul axei lui de simetrie. Cîte soluții are problema?

Formăm capacitățile și aplicăm

8. Dreptunghiul $ABCD$ are $AB = a$ şi $m(\angle CAB) = \alpha$.
El reprezintă desfăşurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept. Determinați aria totală şi volumul cilindrului în două variante, știind că:
a) $a = 24$ cm şi $\alpha = 30°$;
b) $a = 10$ cm şi $\alpha = 45°$;
c) $a = 16$ cm şi $\alpha = 60°$.



9. În desen este reprezentat un cilindru. $[AD]$ şi $[BC]$ sînt două generatoare ale cilindrului. Aflați aria laterală a cilindrului, dacă O este centrul unei baze, iar $\mathscr{A}_{ABCD} = 20$ cm².

10. Înălțimea cilindrului circular drept este H, iar raza bazei lui – R. Aflați aria secțiunii duse paralel cu axa cilindrului la distanța d de la ea, dacă:
a) $R = 5$ cm; $H = 10$ cm; $d = 4$ cm; b) $R = \sqrt{17}$ cm; $H = 4$ cm; $d = 4$ cm;
c) $R = x$; $H = 2x$; $d = 0{,}5x$.

11. Aflați volumul unei pietre, dacă la scufundarea ei într-un vas cilindric de rază R nivelul apei crește cu x:
a) $R = 8$ cm; $x = 3$ cm; b) $R = 3\sqrt{2}$ cm; $x = 2\sqrt{2}$ cm.

12. Să se afle masa unei țevi de lungime l, cu grosimea x și diametrul interior H, dacă densitatea materialului este ρ:
a) $l = 3$ m; $x = 5$ cm; $H = 10$ cm; $\rho = 10$ g/cm^3;
b) $l = 4\sqrt{2}$ m; $x = \sqrt{2}$ cm; $H = 9\sqrt{2}$ cm; $\rho = \frac{12}{\sqrt{2}}$ g/cm^3.

13. Înălțimea unui cilindru circular drept este de 8 cm, iar volumul lui – de 72π cm^3. Determinați aria totală a cilindrului.

14. Care cratiță are capacitatea mai mare, dacă prima este îngustă și înaltă, iar a doua – de două ori mai largă și de două ori mai joasă decît prima?

15. Raza bazei cilindrului este de 5 cm, aria suprafeței laterale este de 3 ori mai mare decît aria unei baze. Aflați aria totală și volumul cilindrului.

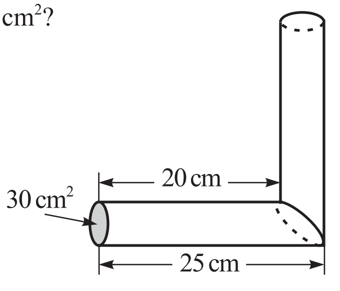
16. Valoarea raportului dintre înălțimea unui cilindru și raza bazei lui este egală cu 1,6. Determinați aria totală și volumul cilindrului, dacă se știe că aria suprafeței laterale a acestuia este egală cu 80π cm^2.

17. Înălțimea cilindrului este de 8 cm, raza bazei lui – de 5 cm. La ce distanță de la axă, paralel cu ea, trebuie secționat cilindrul, pentru ca aria secțiunii să fie de 48 cm^2?

Compuneți și rezolvați o problemă asemănătoare.

18. Cît va cîntări o bară cilindrică de fier cu diametrul bazei de 10 cm și lungimea de 0,5 m, știind că densitatea fierului este de 7850 kg/m^3?

19. În desen este reprezentat un corp format din două bucăți de țeavă identice. Aflați volumul corpului.



Dezvoltăm capacitățile și creăm

20. Dintr-o bară cilindrică se execută un număr maxim de piulițe de forma unui pătrat cu latura de 12 cm, cu pierdere minimă de material. În fiecare piuliță se execută un orificiu cu diametrul de 6 cm. Aflați diametrul barei și cît la sută din volumul barei se pierde prin prelucrare.

21. Dintr-o bară cilindrică cu diametrul de 14 cm se confecționează piulițe hexagonale regulate cu grosimea de 4 cm. Care este numărul maxim de piulițe ce pot fi executate din bara de 89 cm și cît la sută din volumul barei se pierde, dacă în fiecare piuliță se execută un orificiu cu diametrul de 8 mm?

22. De cîte ori trebuie mărită înălțimea unui cilindru circular drept, fără a schimba baza lui, pentru a-i mări volumul de 8 ori?

Compuneți și rezolvați o problemă asemănătoare.

23. De cîte ori trebuie mărită raza bazei unui cilindru circular drept, fără a schimba înălțimea lui, pentru a-i mări volumul de 8 ori?

§ 2. Conul (circular drept)

INVESTIGĂM

1 O grămadă de grîu de formă conică are înălțimea de 2,4 m, iar suprafața bazei – de 26 m². Aflați cantitatea de grîu din grămadă, dacă o tonă de grîu ocupă 1,3 m³.

2.1. Elementele conului

Definiții

Fie $\mathscr{D}$ un disc şi V un punct care nu aparține planului discului.

- Corpul geometric format din toate segmentele cu o extremitate V şi cealaltă aparținînd discului $\mathscr{D}$ se numeşte **con circular** (fig. 9).
- Discul $\mathscr{D}$ se numeşte **baza** conului, iar punctul V – **vîrful** conului.
- Segmentele cu o extremitate V şi cealaltă aparținînd cercului care mărgineşte baza conului se numesc **generatoare**.

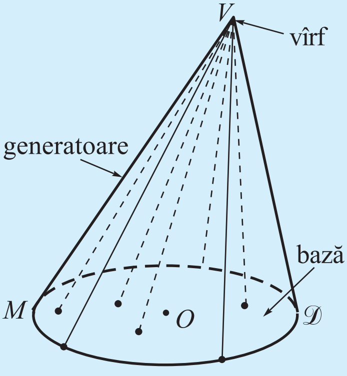


Fig. 9

De exemplu, în figura 9 este reprezentat un con cu vîrful V şi baza $\mathscr{D}$. Segmentul VM este o generatoare a acestui con.

Fie O centrul bazei conului circular (fig. 10).

Dacă dreapta VO este perpendiculară pe baza conului, atunci conul se numeşte ***drept*** (fig. 10 a)), altfel el se numeşte ***oblic*** (fig. 10 b)).

Mulțimea tuturor generatoarelor conului se numeşte ***suprafața laterală a conului***. Mulțimea punctelor conului ce nu aparțin nici suprafeței laterale, nici bazei conului se numeşte ***interiorul conului***.

Perpendiculara coborîtă din vîrful conului pe planul bazei lui se numeşte ***înălțimea conului*** (fig. 10).

Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălțime***.

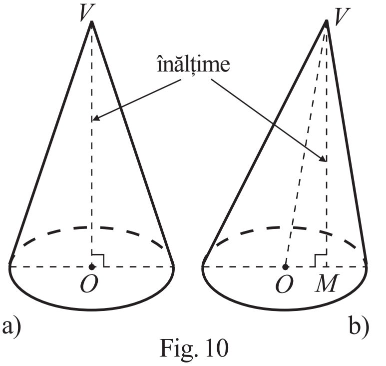


Fig. 10

Observații. **1.** Înălțimea conului circular drept coincide cu segmentul cu extremitățile în vîrful conului şi centrul bazei lui.

2. Deseori, pentru a scurta exprimarea, vom numi con numai suprafața sa.

3. În clasa a IX-a vom cerceta numai conul circular drept, pe care îl vom numi, pe scurt, ***con***.

2 Fie triunghiul dreptunghic ABC cu $m(\angle ABC) = 90°$. Descrieți ce obțineți la rotația completă a triunghiului ABC în jurul dreptei AB.

Rezolvare:

La rotația triunghiului ABC în jurul dreptei AB se obține un con circular drept cu generatoarea AC și raza bazei BC (fig. 11).

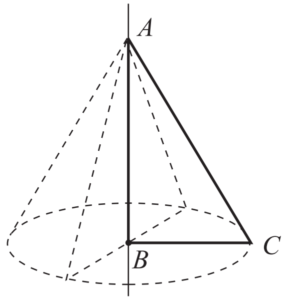


Fig. 11

2.2. Desfășurarea conului. Secțiuni

1 Desfășurați un con și examinați ce obțineți.

Rezolvare:

Tăind suprafața laterală a unui con după o generatoare, obținem o suprafață de forma unui sector de cerc (fig. 12) cu raza egală cu lungimea generatoarei conului. Lungimea arcului de cerc determinat de sector este egală cu lungimea cercului de la bază.

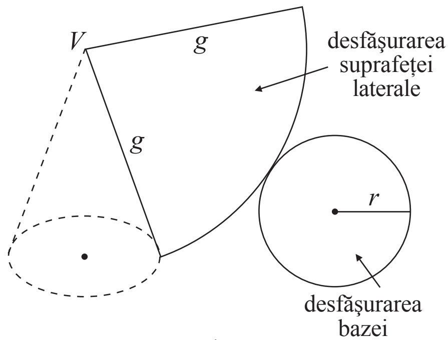


Fig. 12

Atelier. Confecționați din carton un con cu generatoarea de 10 cm și raza bazei de 5 cm.

• Intersectînd conul cu un plan ce conține vîrful și centrul bazei conului, obținem o secțiune mărginită de un triunghi isoscel. Această secțiune se numește ***secțiune axială a conului***. În figura 13 suprafața mărginită de triunghiul ABC este secțiune axială a conului.

Observație. Dreapta VO, unde V este vîrful, iar O – centrul bazei conului, se numește ***axă de simetrie*** a conului.

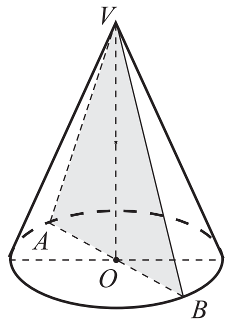


Fig. 13

2.3. Aria laterală, aria totală și volumul conului

1 Fie g generatoarea, iar r raza bazei conului.

• Aria suprafeței laterale a conului se numește ***aria laterală*** a conului și se notează cu $\mathcal{A}_l$.

• $\mathcal{A}_l = \pi g r$.

• ***Aria totală*** $(\mathcal{A}_t)$ a conului este egală cu suma dintre aria laterală și aria bazei conului.

APLICĂM

• Să se afle aria suprafeței corpului obținut la rotația unui pătrat cu latura a în jurul diagonalei sale.

Rezolvare:

Prin rotația pătratului în jurul diagonalei sale obținem un corp format din două conuri congruente cu raza bazei (r) egală cu o jumătate din lungimea diagonalei pătratului și generatoarea (g) congruentă cu latura pătratului (fig. 14).

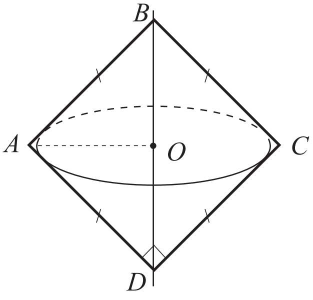


Fig. 14

Luînd în considerație răspunsul problemei 1, obținem:

$$\mathcal{A} = 2 \cdot \pi\, gr = 2 \cdot \pi \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = a^2\pi\sqrt{2}.$$

Răspuns: $a^2\pi\sqrt{2}$ u. p.

2 Aflați volumul conului cu înălțimea h și raza bazei r.

Rezolvare:

Considerînd o piramidă regulată cu baza un poligon regulat cu un număr foarte mare de laturi, obținem un corp asemănător cu un con (fig. 15). Prin urmare, ca și în cazul piramidei, volumul conului poate fi calculat după formula $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_b \cdot h$.

Dar $\mathcal{A}_b = \pi r^2$. Deci, $\boxed{\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$.

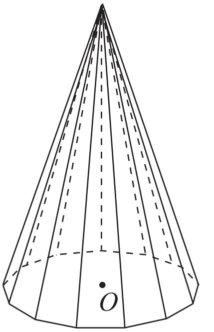


Fig. 15

Teorema 2

Pentru orice con circular drept, $\mathcal{A}_l = \pi gr$,

$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_b = \pi gr + \pi r^2 = \pi r(g + r),$$

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_b \cdot h = \frac{1}{3}\pi r^2 h,$$

unde r, g, h, $\mathcal{A}_l$, $\mathcal{A}_b$, $\mathcal{A}_t$, $\mathcal{V}$ sînt respectiv raza bazei, generatoarea, înălțimea, aria laterală, aria bazei, aria totală și volumul conului.

• *Rezolvarea problemei* 1 (de la începutul paragrafului):

Fie V volumul ocupat de grîu.

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$, unde r este raza bazei grămezii, iar $h = 2{,}4$ m.

Din condiția problemei, $2\pi r^2 = 26$ (m).

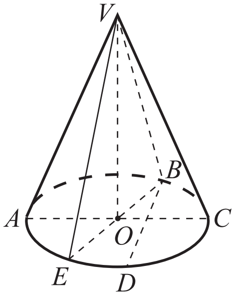
Prin urmare, $V = \frac{1}{3} \cdot 26 \cdot 2{,}4 = 20{,}8$ (m^3).

Deci, grîul cîntărește $20{,}8 : 1{,}3 = 16$ (t).

Răspuns: 16 tone de grîu.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele



1. Reprezentați un con:
a) circular drept; b) circular oblic.

2. În figură este reprezentat un con circular drept cu centrul bazei O. Identificați:
a) generatoarele; b) înălțimile; c) razele bazei; d) coardele bazei.

3. Ilustrați desfăşurarea unui con circular drept cu generatoarea g şi raza bazei R, dacă:
a) $g=5$ cm, $R=2$ cm; b) $g=7$ cm, $R=3$ cm.

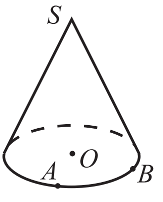
4. Fie un con circular drept de bază $\mathscr{C}(O, R)$, $\mathscr{A}_b$, $\mathscr{A}_l$, $\mathscr{A}_t$, $\mathscr{V}$ sînt respectiv aria bazei, aria laterală, aria totală şi volumul conului, g – generatoarea, iar h – înălțimea conului. Completați tabelul:

R	g	h	$\mathscr{A}_b$	$\mathscr{A}_l$	$\mathscr{A}_t$	$\mathscr{V}$
4		3				
5	13					
		4				108π
8				80π		
	7					30π

5. Un triunghi isoscel cu laturile de 5 cm, 5 cm şi 6 cm se roteşte în jurul axei lui de simetrie. Aflați aria totală şi volumul corpului geometric obținut.

6. Un triunghi isoscel cu laturile de 13 cm, 13 cm şi 10 cm se roteşte în jurul bazei lui. Determinați aria şi volumul corpului geometric obținut.

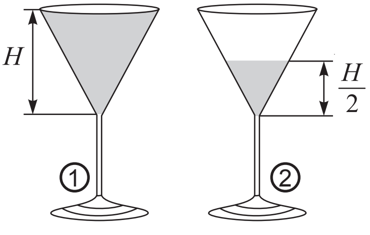
Formăm capacitățile și aplicăm



7. Aria totală a unui con circular drept este de $253\ \text{cm}^2$, iar aria lui laterală – de $11\ \text{cm}^2$. Aflați lungimea generatoarei conului.

8. Determinați aria secțiunii conului ce conține punctele S, A, B, dacă $SO=10$ cm, $OA=3$ cm, $AB=4$ cm.

9. Un triunghi dreptunghic cu catetele de 4,5 cm şi 6 cm se roteşte în jurul înălțimii coborîte din vîrful unghiului drept. Aflați aria totală şi volumul corpului de rotație obținut.



10. Aria secțiunii axiale a unui con este S. Aflați aria laterală şi volumul conului, dacă raza bazei conului este R.

11. Examinați desenul. În primul pahar (de formă conică) sînt 200 ml de suc. Cît suc se află în paharul al doilea, acesta fiind identic cu primul?

Dezvoltăm capacitățile și creăm

12. Aria secțiunii obținute la intersecția conului cu un plan, paralel cu baza conului, este egală cu S. Secțiunea se află la distanța d de la vîrful conului, iar h este înălțimea conului. Determinați aria laterală şi volumul conului.

13. Un triunghi dreptunghic cu catetele a şi b se roteşte în jurul ipotenuzei. Aflaţi volumul corpului obţinut.

14. Aria bazei unui con circular drept este de 9π cm². Determinaţi aria suprafeţei totale a conului, dacă volumul lui este de 12π cm³.

15. Generatoarea unui con circular drept este de 10 cm, iar unghiul secţiunii axiale de pe lîngă vîrf – de $120°$. Aflaţi volumul conului.

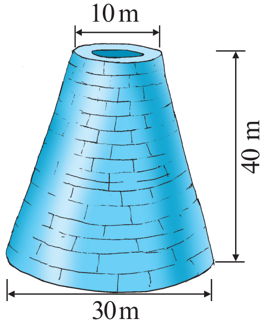
16. Un triunghi echilateral cu latura de 8 cm se roteşte în jurul dreptei ce conţine un vîrf al triunghiului şi este paralelă la latura ce nu conţine acest vîrf. Determinaţi volumul corpului de rotaţie obţinut.

17. Un romb cu latura de 8 cm şi unghiul ascuţit de $60°$ se roteşte în jurul unei laturi. Aflaţi volumul corpului obţinut.

18. Un trapez isoscel cu bazele de 10 cm, 12 cm şi latura laterală de 10 cm se roteşte în jurul bazei mari. Determinaţi volumul corpului obţinut.

§ 3. Trunchiul de con (circular drept)

1 Un coş de fum al unei staţii electrotermice are formă tronconică (vezi desenul). Diametrul exterior al bazei mari este de 30 m, iar al bazei mici – de 10 m. Înălţimea coşului este de 40 m. Ce cantitate de ciment s-a consumat la tencuirea suprafeţei laterale a coşului, dacă pentru 10 m² de suprafaţă s-au folosit 50 kg de ciment?



3.1. Elementele trunchiului de con

INVESTIGĂM

Intersecţia unui con cu un plan paralel cu baza conului este un disc. Partea conului mărginită de acest disc şi de baza conului se numeşte ***trunchi de con*** (fig. 16). Ambele discuri ale trunchiului de con se numesc **baze**. Segmentele trunchiului de con, conţinute de generatoarele conului, se numesc ***generatoare*** ale trunchiului de con. Mulţimea generatoarelor trunchiului de con formează ***suprafaţa laterală*** a trunchiului de con. Segmentul trunchiului de con, conţinut de înălţimea conului, se numeşte ***înălţimea*** trunchiului de con.

Fie O, O_1 centrele bazelor trunchiului de con. Segmentul OO_1 este ***înălţimea*** trunchiului de con. Lungimea acestui segment de asemenea se numeşte ***înălţime***.

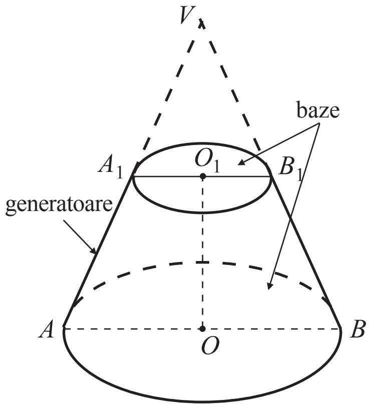


Fig. 16

2 Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic cu $m(\angle A) = 90°$. Descrieți ce obțineți la rotația trapezului $ABCD$ în jurul dreptei AB.

Rezolvare:

La rotația trapezului $ABCD$ (fig. 17) în jurul dreptei AB se obține un trunchi de con circular drept. Baza mică (mare) a trapezului este congruentă cu raza bazei mici (mari) a trunchiului de con, iar AB este înălțimea trunchiului de con.

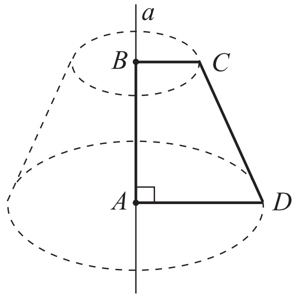


Fig. 17

3.2. Desfășurarea trunchiului de con. Secțiuni

1 Desfășurați un trunchi de con și examinați ce obțineți (fig. 18).

Rezolvare:

Tăind suprafața laterală a unui trunchi de con după o generatoare, obținem o figură numită sector de coroană circulară.

Observăm că lungimile arcelor coroanei circulare sînt egale cu lungimile bazelor trunchiului de con.

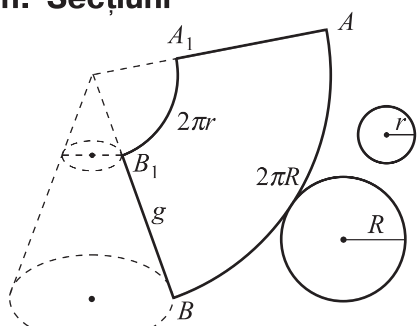


Fig. 18

Atelier. Confecționați din carton un trunchi de con cu razele bazelor de 2 cm și 4 cm și generatoarea de 10 cm.

Intersectînd trunchiul de con cu un plan ce conține centrele bazelor trunchiului de con, obținem o secțiune care se numește ***secțiune axială*** a trunchiului de con.

Secțiunea axială a trunchiului de con este o suprafață mărginită de un trapez isoscel (fig. 19).

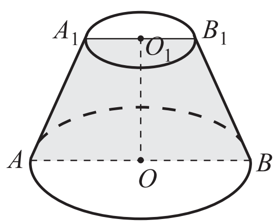


Fig. 19

Observație. Dreapta OO_1, unde O și O_1 sînt centrele bazelor trunchiului de con, se numește ***axa de simetrie*** a trunchiului de con.

• Descrieți ce obțineți intersectînd trunchiul de con cu un plan ce nu conține centrele bazelor lui, dar este paralel cu dreapta determinată de ele.

2 (opțional). Aflați aria suprafeței laterale a trunchiului de con cu razele bazelor R și r și generatoarea g (fig. 20).

Rezolvare:

Fie $\mathscr{A}_l$ aria suprafeței laterale a trunchiului de con, $\mathscr{A}$ aria laterală a conului din care provine trunchiul de con, iar $\mathscr{A}_1$ aria laterală a conului mic.

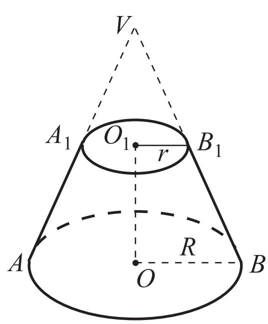


Fig. 20

Notăm prin l generatoarea conului mic, atunci $g+l$ este generatoarea conului mare. Obținem $\mathscr{A}_l = \mathscr{A} - \mathscr{A}_1 = \pi R(l+g) - \pi rl = \pi Rg + \pi l(R-r)$ $(*)$.

Observăm că $\frac{R}{r} = \frac{g+l}{l}$, de unde $l = \frac{rg}{R-r}$.

Substituind în formula $(*)$, obținem:

$$\mathscr{A}_l = \pi Rg + \pi \cdot \frac{rg}{R-r} \cdot (R-r) = \pi g(R+r).$$

Răspuns: $\pi g(R+r)$.

APLICĂM

• Fie trapezul $ABCD$ cu baza mare AB, $DC = 10$ cm, $m(\angle A) = m(\angle B) = 45°$ și înălțimea de 6 cm (fig. 21). Determinați aria totală a corpului obținut prin rotația acestui trapez în jurul axei lui de simetrie.

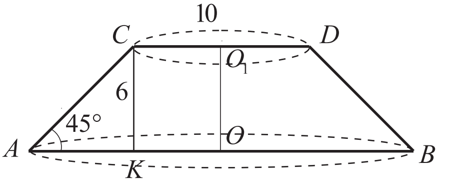


Fig. 21

Rezolvare:

Fie O și O_1 mijloacele bazelor AB și CD.

OO_1 este axa de simetrie a trapezului.

La rotația trapezului $ABCD$ în jurul dreptei OO_1 se obține un trunchi de con cu bazele de raze AO și CO_1 și înălțimea OO_1. Fie CK înălțimea trapezului.

Triunghiul AKC este dreptunghic isoscel. Deci, $AK = CK$. Deoarece $KO = CO_1$, obținem $AO = AK + KO = 6 + 5 = 11$ (cm). $AC = \frac{AK}{\cos 45°} = 6\sqrt{2}$ (cm). Astfel, luînd în considerație răspunsul problemei **2**, aria totală a trunchiului de con este:

$$\mathscr{A}_t = \mathscr{A}_l + \pi \cdot AO^2 + \pi \cdot CO_1^2 = \pi \cdot 6\sqrt{2} \cdot 16 + \pi \cdot 121 + \pi \cdot 25 = (96\sqrt{2} + 146)\pi \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Răspuns: $(96\sqrt{2} + 146)\pi$ cm^2.

• *Rezolvarea problemei* **1** (de la începutul paragrafului):

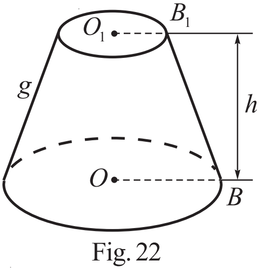


Fig. 22

Fie S suprafața tencuită. Atunci, ținînd cont de răspunsul problemei **2**, $S = \pi g(R+r)$, unde R, r, g sînt respectiv raza mare, raza mică și generatoarea trunchiului de con corespunzător coșului (fig. 22) și $R = 15$ m, $r = 5$ m.

Observăm (fig. 23) că $g = \sqrt{h^2 + (R-r)^2}$.

Deci, $g = \sqrt{40^2 + 10^2} = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$ (m).

Atunci $S \approx 3{,}14 \cdot 10\sqrt{17} \cdot 20 \approx 2\,589{,}3$ (m^2).

Prin urmare, s-au consumat aproximativ $(2\,589{,}3 : 10) \cdot 50 = 12\,946{,}5$ (kg) de ciment.

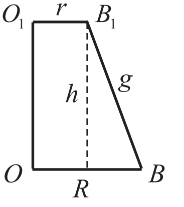


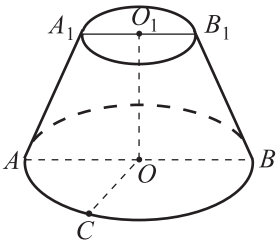
Fig. 23

Răspuns: 12 946,5 kg de ciment.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Reprezentați un trunchi de con:
a) circular drept; b) circular oblic.

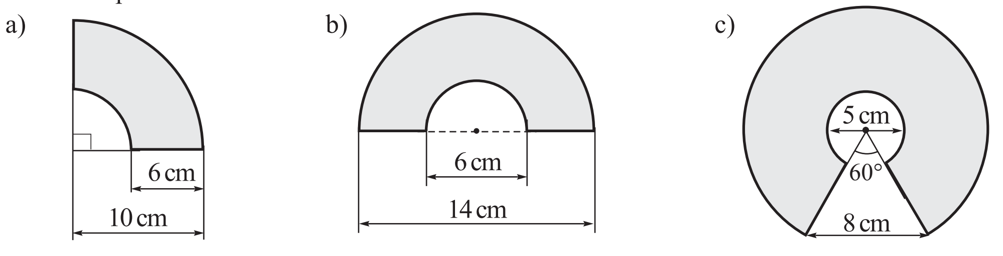


2. În figură este reprezentat un trunchi de con circular drept. Identificați:
a) generatoarele;
b) înălțimile;
c) razele bazelor.

3. Un trapez isoscel cu bazele de 10 cm şi 5 cm se roteşte în jurul axei lui de simetrie. Descrieți corpul de rotație obținut, dacă înălțimea trapezului este de 8 cm.

4. Ilustrați desfăşurarea unui trunchi de con circular drept cu generatoarea g şi razele bazelor R, r, dacă:
a) $g = 6$ cm, $R = 3$ cm, $r = 1$ cm; b) $g = 8$ cm, $R = 4$ cm, $r = 2$ cm.

5. Utilizînd datele din desen, determinați razele bazelor, lungimea generatoarei şi înălțimea trunchiului de con circular drept, a cărui desfăşurare a suprafeței laterale coincide cu sectorul de coroană circulară reprezentat:



Formăm capacitățile și aplicăm

6. Aflați razele bazelor şi înălțimea unui trunchi de con, ştiind că secțiunea lui axială este mărginită de un patrulater cu laturile de 12 cm, 125 cm, 125 cm, 100 cm.

7. Determinați lungimea generatoarei unui trunchi de con cu diametrele bazelor de 12 cm şi 28 cm şi aria secțiunii axiale a trunchiului egală cu 120 cm^2.

8. Raza cercului circumscris secțiunii axiale a unui trunchi de con este de 42,5 cm. Aflați lungimea generatoarei trunchiului, dacă ariile bazelor sînt egale cu $1\,764\pi$ cm^2 şi 324π cm^2.

9. Un trunchi de con are înălțimea de 4 cm şi generatoarea de $4\sqrt{2}$ cm. Aflați înălțimea conului din care provine trunchiul, dacă media aritmetică a razelor bazelor este egală cu 10 cm.

10. Aria secțiunii axiale a unui trunchi de con este de 81 cm^2. Determinați raza bazei mari a trunchiului, dacă raza bazei mici este de 2,5 cm, iar generatoarea trunchiului – de 9 cm.

11. Razele bazelor unui trunchi de con sînt de 8,7 cm şi 5,3 cm. Aflați lungimea generatoarei trunchiului, dacă aria secțiunii axiale a acestuia este egală cu 119 cm^2.

Dezvoltăm capacitățile și creăm

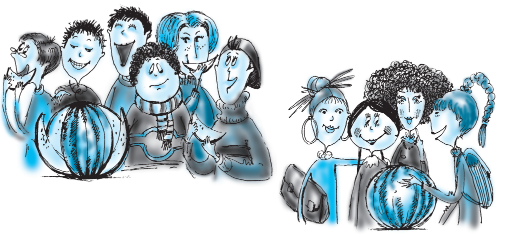
12. Centrul cercului circumscris secțiunii axiale a unui trunchi de con coincide cu centrul bazei mari a trunchiului. Aflați raza bazei mari a trunchiului, dacă raza bazei mici este de 5 cm, iar aria secțiunii axiale a acestuia este egală cu $216\ \text{cm}^2$.

13*. Razele bazelor şi înălțimea unui trunchi de con circular drept sînt direct proporționale cu numerele 3, 6 şi 4. Determinați volumul trunchiului de con, dacă lungimea generatoarei este egală cu 25 cm.

14. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare. Aflați razele bazelor trunchiului de con, dacă se ştie că o rază este de două ori mai mare decît cealaltă, iar volumul conului din care provine trunchiul este de $64\pi\ \text{cm}^3$.

§ 4. Sfera

1 Şase băieți au mîncat egal un pepene verde cu raza de 20 cm, iar patru fete au mîncat egal un pepene verde cu raza de 15 cm. Cui i-a revenit mai mult pepene verde: unei fete sau unui băiat?



4.1. Elementele sferei

INVESTIGĂM

2 Fie O un punct şi R un număr real pozitiv.

a) Care este locul geometric al punctelor din plan situate la distanța R de punctul O?

b) Ce se obține prin rotația în plan a unui segment de lungime R în jurul unei extremități (fixate)?

c) Denumiți locul geometric al punctelor din spațiu situate la distanța R de punctul O.

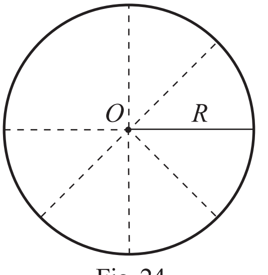


Fig. 24

Rezolvare:

a) Locul geometric al punctelor din plan situate la distanța R de punctul O este cercul $\mathscr{C}(O,R)$ (fig. 24).

b) Rotind complet un segment de lungime R în jurul unei extremități, obținem un disc de rază R (fig. 25).

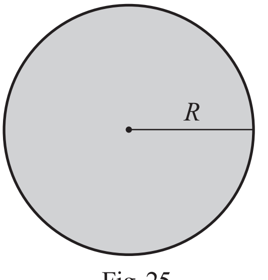


Fig. 25

c) Mulțimea punctelor din spațiu situate la distanța R de punctul O se numeşte ***sferă de centru O şi rază R***.

Notăm: $\mathscr{S}(O, R)$. Deci, $\mathscr{S}(O,R)=\{M \mid OM=R\}$.

Orice segment care uneşte centrul sferei cu un punct al ei se numeşte ***rază*** (fig. 26). Segmentul care uneşte două puncte ale sferei se numeşte ***coardă***. Coarda ce conține centrul sferei se numeşte ***diametru***.

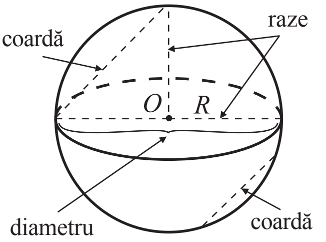


Fig. 26

3 Numiți locul geometric al punctelor din spațiu:
a) situate la o distanță mai mică decît R de punctul O;
b) situate la o distanță mai mare decît R de punctul O.

Rezolvare:

a) Mulțimea punctelor din spațiu situate la o distanță mai mică decît R se numeşte ***interiorul*** sferei $\mathcal{S}(O, R)$.

Notăm: Int $\mathcal{S}(O, R)$. Deci, $\text{Int } \mathcal{S}(O,R) = \{M \mid OM < R\}$.

b) Mulțimea punctelor din spațiu situate la o distanță mai mare decît R de punctul O, adică mulțimea punctelor din spațiu care nu aparțin sferei $\mathcal{S}(O, R)$ şi interiorului ei, se numeşte ***exteriorul*** sferei $\mathcal{S}(O, R)$.

Notăm: Ext $\mathcal{S}(O, R)$. Deci, $\text{Ext } \mathcal{S}(O,R) = \{M \mid OM > R\}$.

Sfera împreună cu interiorul ei se numeşte ***bilă*** sau ***corp sferic***. Prin urmare, suprafața bilei este o sferă.

Secțiunea obținută la intersecția unui plan cu o sferă este un cerc (fig. 27).

Dacă centrul acestui cerc coincide cu centrul sferei, atunci el se numeşte ***cerc mare al sferei*** (fig. 28).

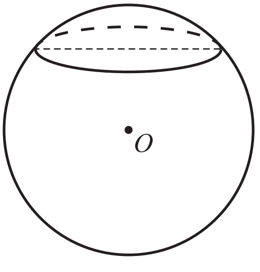


Fig. 27

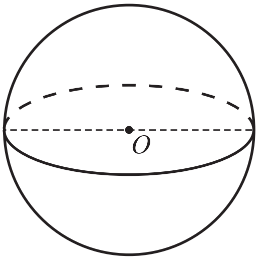


Fig. 28

4.2. Aria sferei. Volumul corpului sferic

În clasa a XII-a se va demonstra că:

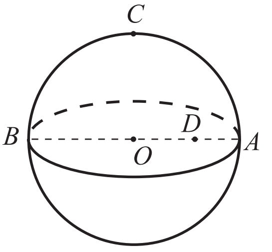
- aria suprafeței sferei se calculează cu ajutorul formulei $\mathcal{A} = 4\pi R^2$, unde R este raza sferei;
- volumul corpului sferic se calculează cu ajutorul formulei $\mathcal{V} = \dfrac{4\pi R^3}{3}$, unde R este raza acestui corp.

Exerciții și probleme

Fixăm cunoștințele

1. Ilustrați și notați o sferă.

2. Punctele A, B, C din desenul alăturat aparțin $\mathcal{S}(O, R)$. Identificați printre segmentele OA, OC, OB, AB, BC, CA, DA, DC, BD:
a) razele;
b) coardele;
c) diametrul.



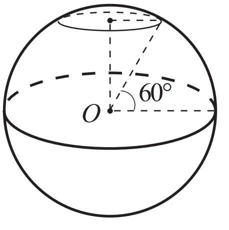
3. Fie $\mathcal{S}(O, R)$, h distanța de la dreapta d la centrul O. Decideți care este poziția dreptei d față de sferă, dacă:
a) $d = 8$ cm, $R = 9$ cm.   b) $d = 11$ cm, $R = 7$ cm.   c) $d = 10$ cm, $R = 10$ cm.

4. Fie $\mathcal{S}(O, R)$ și h distanța de la planul α la centrul O.
Decideți care este poziția planului α față de sferă, dacă:
a) $d = 5$ cm, $R = 2\sqrt{3}$ cm;   b) $d = \frac{7}{9}$ cm, $R = \frac{5}{8}$ cm;   c) $d = 5,(6)$ cm, $R = 5\frac{2}{3}$ cm.

5. Fie d distanța de la centrul $\mathcal{S}(O, R)$ la coarda AB. Determinați lungimea coardei, dacă:
a) $d = 3$ cm, $R = 5$ cm;   b) $d = 5$ cm, $R = 13$ cm;   c) $d = 2\sqrt{5}$ cm, $R = 2\sqrt{6}$ cm.

Formăm capacitățile și aplicăm

6. Raza sferei terestre este (aproximativ) de 6400 km. Care este lungimea unei paralele de 60° latitudine (vezi desenul)?



7. Aria cercului mare al sferei este S.
Aflați aria și volumul sferei, dacă:
a) $S = 36\pi \text{ m}^2$;   b) $S = 1\frac{32}{49}\pi \text{ m}^2$;   c) $S = 27\pi \text{ m}^2$.

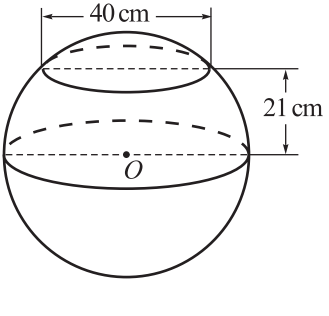
8. Fie $\mathcal{S}(O, R)$ și d distanța de la planul α la centrul O.
Determinați aria cercului de intersecție a planului α cu sfera, dacă:
a) $R = 15$ cm, $d = 12$ cm;   b) $R = 8\sqrt{3}$ cm, $d = 2\sqrt{3}$ cm;   c) $R = d = 10$ cm.

9. Rezolvați problema propusă la începutul paragrafului.

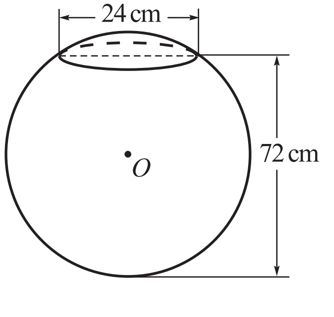
Dezvoltăm capacitățile și creăm

10. Utilizînd datele din desen, aflați aria sferei (O este centrul sferei):

a)



b)



11. Aria unei sfere este de $387\ cm^2$. Aflați aria sferei al cărei volum este de 27 de ori mai mic decît volumul sferei date.

12. Aria unei sfere este de $20\ cm^2$. La ce distanță de la centru trebuie secționată sfera, astfel încît aria discului mărginit de cercul din secțiune să fie egală cu $2{,}75\ cm^2$?

Exerciții și probleme recapitulative

Fixăm cunoștințele

1. Reprezentați:
a) un con circular drept;
b) un cilindru circular drept;
c) un trunchi de con circular drept;
d) o sferă.

2. Construiți desfășurarea:
a) unui cilindru circular drept cu raza bazei de 2 cm și generatoarea de 6 cm;
b) unui con circular drept cu raza bazei de 3 cm și generatoarea de 8 cm;
c) unui trunchi de con circular drept cu razele bazelor de 2 cm și 3 cm și generatoarea de 5 cm.

3. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru circular drept este o suprafață dreptunghiulară cu dimensiunile de $2\sqrt{5}$ cm și $10\sqrt{3}$ cm. Aflați aria totală și volumul cilindrului, dacă se știe că generatoarea este mai mică decît diametrul bazei lui.

4. Desfășurarea suprafeței laterale a unui con circular drept este un sector de cerc de 60° și raza de 9 cm. Aflați aria totală și volumul conului.

5. Aflați raza unui disc a cărui arie este egală cu aria totală a unui cilindru circular drept cu raza bazei de 2 cm și înălțimea de 7 cm.

6. Determinați volumul corpului obținut prin rotația unui dreptunghi cu diagonala de 5 cm și perimetrul de 14 cm în jurul laturii mai mari.

7. Determinați volumul corpului obținut prin rotația unui triunghi dreptunghic cu catetele de $3\frac{1}{3}$ cm și $2\sqrt{3}$ cm:
a) în jurul catetei mai mari;
b) în jurul ipotenuzei.

Formăm capacitățile și aplicăm

8. Desfășurarea suprafeței laterale a unui cilindru este de forma unui pătrat cu diagonala de $\sqrt{72}$ cm. Aflați volumul cilindrului.

9. Înălțimea conului este congruentă cu diametrul bazei lui. Aflați raportul dintre aria bazei și aria laterală a conului.

10. Aflați aria laterală și volumul cilindrului obținut la rotația completă a unui dreptunghi de dimensiunile 5 cm și 7 cm în jurul unei laturi. Cercetați ambele cazuri.

11. O bilă cu raza de 6 cm și un cub cu latura de 9 cm sînt confecționate din același material. Comparați masa acestor corpuri.

12. Un triunghi echilateral se roteşte în jurul axei lui de simetrie. Aflaţi volumul corpului obţinut, dacă aria triunghiului este de $16\sqrt{3}$ cm^2.

13. Aflaţi raza bazei unui cilindru circular drept cu aria totală de 13π cm^2 şi generatoarea de $1\frac{1}{4}$ cm.

14. Aflaţi raza bazei unui con circular drept cu aria totală de 98π cm^2 şi generatoarea de 7 cm.

15. O bilă de rază 10 cm se află într-un vas de formă cilindrică cu raza bazei de 12 cm. În vas se toarnă 1 *l* de apă. Va fi acoperită oare bila de apă?

16. Diagonalele unui romb au lungimile de 6 cm şi $6\sqrt{3}$ cm. Determinaţi aria totală a corpului obţinut la rotaţia completă a rombului în jurul uneia dintre laturile sale.

17. Care corp are volumul mai mare: o sferă de rază 10 cm sau un tetraedru regulat cu muchia de 15 cm?

Dezvoltăm capacităţile şi creăm

18. Distanţa dintre centrul bazei conului şi generatoarea lui este egală cu $3\sqrt{3}$ cm. Aflaţi aria totală şi volumul conului, dacă generatoarea lui formează cu planul bazei un unghi de 60°.

19. Distanţa dintre centrul bazei conului şi generatoarea lui este egală cu $6\frac{1}{2}$ cm. Determinaţi aria totală şi volumul conului, dacă generatoarea lui formează cu înălţimea conului un unghi de 60°.

20. Aria laterală a unui con este de 4 ori mai mare decît aria bazei lui. Aflaţi măsura unghiului la centru al sectorului de cerc care reprezintă desfăşurarea suprafeţei laterale a conului.

21. O sferă este înscrisă într-un con. Valoarea raportului dintre aria bazei conului şi aria sferei este egală cu 0,75. Aflaţi măsura unghiului dintre generatoare şi planul bazei conului.

22. Un triunghi echilateral se roteşte în jurul unei laturi. Determinaţi volumul corpului obţinut, dacă latura triunghiului este a.

23*. Aflaţi raza bazei mari a unui trunchi de con circular drept cu aria totală de 506π cm^2, aria laterală de 273π cm^2 şi raza bazei mici de 8 cm.

24*. Trapezul $ABCD$ cu baza mare AB are $m(\angle A) = 90°$, $AD = 8$ cm, $AB = 8$ cm, $DC = 2$ cm. Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia trapezului în jurul:

a) laturii AB; b) bazei mici.

Test sumativ

Timp efectiv de lucru: 45 de minute

Varianta I

1. Fie un cilindru circular drept cu generatoarea de 5,5 cm şi raza bazei de 2 cm.
   a) Desenaţi desfăşurarea cilindrului dat. **3 p**
   b) Aflaţi aria laterală a cilindrului. **3 p**
   c) Determinaţi aria totală a cilindrului. **3 p**
   d) Aflaţi volumul cilindrului. **3 p**

2. Un con circular drept de metal are generatoarea de 5 cm, iar diametrul bazei de 4 cm.
   a) Aflaţi înălţimea conului. **3 p**
   b) Determinaţi aria laterală a conului. **3 p**
   c) Aflaţi volumul conului. **3 p**
   d) Conul a fost topit şi din metalul obţinut s-au confecţionat bile cu raza de 1 cm. Câte bile s-au obţinut? **5 p**

3. Aria suprafeţei unei mingi sferice este egală cu 400π cm^2.
   a) Este oare posibil să punem această minge într-o cutie de forma unui cub cu muchia de 15 cm? Justificaţi. **5 p**
   b) Mingea se află la 2 m de un perete. Un copil a lovit mingea în direcţia peretului. Mingea s-a rostogolit pe o linie dreaptă de 3 ori şi s-a oprit. La ce distanţă de la perete se află ea? (În calcule consideraţi $\pi \approx 3{,}14$.) **6 p**

4. O piesă are forma figurii care se obţine la rotirea unui triunghi dreptunghic cu catetele de 8 cm şi 6 cm în jurul ipotenuzei. Aflaţi volumul piesei. **7 p**

Varianta II

1. Fie un cilindru circular drept cu înălţimea de 6 cm şi raza bazei de 3 cm.
   a) Desenaţi desfăşurarea cilindrului dat.
   b) Aflaţi aria laterală a cilindrului.
   c) Determinaţi aria totală a cilindrului.
   d) Aflaţi volumul cilindrului.

2. Un con circular drept are înălţimea de 12 cm, iar diametrul bazei de 10 cm.
   a) Aflaţi generatoarea conului.
   b) Determinaţi aria laterală a conului.
   c) Aflaţi volumul conului.
   d) O bilă de metal cu raza de 15 cm a fost topită şi din metalul obţinut s-au confecţionat conuri cu dimensiunile date mai sus. Câte conuri s-au obţinut?

3. Aria suprafeţei unei mingi de ping-pong este egală cu 16π cm^2.
   a) Câte astfel de mingi încap într-o cutie de forma unui cilindru circular drept cu înălţimea de 12,5 cm şi raza bazei de 4,2 cm? Justificaţi.
   b) Mingea a fost împinsă şi s-a mişcat pe o dreaptă în direcţia opusă a mesei de tenis. S-a rostogolit de 15 ori şi s-a oprit. La ce distanţă de la marginea mesei se află mingea, dacă lungimea mesei este de 2,74 m? (În calcule consideraţi $\pi \approx 3{,}14$.)

4. O piesă are forma figurii care se obţine la rotirea unui triunghi dreptunghic cu ipotenuza de 10 cm şi un unghi ascuţit de 60° în jurul ipotenuzei. Aflaţi volumul piesei.

Baremul de notare

Nota	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Nr. puncte	44–43	42–38	37–32	31–26	25–20	19–14	13–11	10–7	6–3	2–1

Răspunsuri și indicații

Algebră

Capitolul 1

§ 1. **3.** 2) a) 0,875, nu este periodic; c) 4,(851), perioada este 851. **4.** a), c), e) Numere zecimale periodice simple; b), d), f) numere zecimale periodice mixte. **7.** 10 nuci; 120 de nuci. **8.** d) $x_1=5,\ x_2=-2$ – numere raționale; f) $x_1=5-3\sqrt{3},\ x_2=5+3\sqrt{3}$ – numere iraționale. **9.** b) $\frac{29}{9}$; c) $\frac{557}{90}$; d) $\frac{2\,817}{550}$; e) $\frac{27\,903}{1\,110}$. **10.** a) $1+\sqrt{7}>2\sqrt{3}$; d) $-\frac{1}{3}=-0,(33)$. **11.** b) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$; c) 1; d) $11-6\sqrt{2}$. **12.** c) $\{x\in\mathbb{R}\,|\,(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)\}$. **15.** 25 kg. **18.** b) $S=\varnothing$; c) $S=\{-1,\ 4\}$. **19.** a) $S=\{0;\ 0,5\}$; b) *Indicație*. $|2+x|=|5x-3|\Leftrightarrow(2+x)^2=(5x-3)^2$.

§ 2. **1.** a) $6\sqrt{2}+5\sqrt{6}-9,5$; b) $11,6-21\sqrt{2}$. **2.** c) $2,828<2\sqrt{2}<2,829$; d) $6,708<3\sqrt{5}<6,709$. **3.** c) $3-\sqrt{2}<1,7$; d) $1+\sqrt{3}<2+\sqrt{2}$. **5.** La fierbere se pierde 33% din vitamina C. **6.** ≈ 170 g de unt, ≈ 130 g de zahăr, 200 g de ciocolată, 4 ouă, 2 linguri de făină. **8.** b) De exemplu, $4+(4+\sqrt{5})$; $10-(2-\sqrt{5})$; $4(2+0,25\sqrt{5})$; $\frac{8\sqrt{2}+\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$. **9.** De 10 ori. **10.** 0,5 și –1. **13.** a) $8-2\sqrt{15}$; d) $38+12\sqrt{10}$. **14.** b) $11\sqrt{2}-9\sqrt{3}$; d) $26+15\sqrt{3}$. **15.** b) $\approx -5,689$; d) $\approx 2,466$. **16.** $16+8\sqrt{5}$. **17.** Cu 36%. **19.** a) $2\sqrt{13}+3\sqrt{3}+120\sqrt{2}-188$. **22.** 185^2-15^2.

§ 3. **2.** a) $a\in[2,\ +\infty)$; b) $a\in(-\infty,\ 0]$; c) $a\in(-1,\ +\infty)$. **3.** a) $\sqrt{12}$; b) $-\sqrt{3a^2}$; c) $\sqrt{b(b-1)^2}$. **4.** a) $4\sqrt{3}$; b) $7\sqrt{2}$; c) $a^2\sqrt{5}$; d) $(2-a)\sqrt{7}$. **6.** a) 27; b) $\frac{1}{25}$; c) $7\frac{4}{11}$; d) $\frac{1}{16}$. **7.** a) $10a^2$; b) $\frac{1}{4}x$; c) $4b^6$; d) $1000y^{-6}$. **8.** a) 10; b) $\frac{4}{3}$. **9.** a) $\frac{\sqrt{21}}{9}$; b) $\frac{3\sqrt{10}}{25}$; c) $\sqrt{3}-1$; e) $4\sqrt{5}-9$. **10.** a) –12; b) 60; c) $9+5\sqrt{3}$; d) 11. **11.** a) $x-\sqrt{5}$; b) $\frac{1}{\sqrt{a}}$; c) $-\sqrt{2}$; d) $2-\sqrt{7}$. **12.** a) $\frac{1}{9}$; b) 5; c) $40\frac{1}{2}$; d) 9; e) –0,9999; f) $\frac{1}{2}$. **13.** a) 210; b) 30; c) 1 500; d) 0,4. **16.** a) 500; b) 0,07; c) 4 000; d) 0,009. **17.** a) 38; b) $4(\sqrt{5}-1)$. **18.** a) A; b) A; c) F; d) A. **19.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{4}{49}$; c) $\frac{3}{2}$; d) $\frac{2}{5}$. **20.** a) $\frac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}$; b) $\sqrt{10}$; c) $-\sqrt{2}$.

Exerciții și probleme recapitulative

1. b) $35-7\sqrt{3}+5\sqrt{2}-4\sqrt{6}$. **3.** a) $\sqrt{7}<\sqrt{10}$; b) $\sqrt{63}>\sqrt{54}$; c) $\sqrt{23}<\sqrt{103}$. **4.** b) $3\sqrt{7}$; c) $3\sqrt{2}-2$; d) $\sqrt{66}-8$. **7.** b) c^{-10}; d) $\frac{1}{3x^5}$. **8.** 10, 1 și 9. **9.** 50,8 lei. **10.** d) De exemplu, $3\sqrt{13}+4\sqrt{13}$; $8\sqrt{13}-\sqrt{13}$; $2\sqrt{13}\cdot 3,5$; $\frac{91}{\sqrt{13}}$. **11.** b) $11+4\sqrt{7}$; d) $200+80\sqrt{5}$. **13.** a) $3\sqrt{3}-1$; c) $14-6\sqrt{5}$. **14.** a) $S=\{-1,4\}$; b) $S=\{0;\ 0,5\}$; c) $S=\{-2,\ 2\}$. **15.** a) $5-2\sqrt{3}<2+\sqrt{2}$; b) $6+\sqrt{7}<4\sqrt{7}$. **17.** a) $6\frac{7}{9}$; b) $15\frac{25}{99}$; c) $\frac{637}{198}$; d) $\frac{557}{4500}$. **18.** a) $-4x$; d) $-2x^2y^3\sqrt{2}$. **20.** 80 cm. **21.** 50 de ani și 14 ani. **22.** 0,5. **27.** *Indicație*. a), b), d) Efectuați substituția $|x|=t$; c) efectuați substituția $|3-x|=t$. **29.** *Indicație*. Cercetați cazurile $a>0,\ a<0,\ a=0$.

Capitolul 2

§ 1. **2.** b). **4.** a). **6.** a) Nu; b) nu; c) da; d) nu. **8.** $f(x)=3x+1$. **9.** *Indicație*. Cercetați două cazuri: $p(x)=(8+2\sqrt{3})x$, $p(x)=(8-2\sqrt{3})x$, x – înălțimea trapezului. **12.** a) Da; b) nu.

§ 2. **4.** a) f – strict crescătoare; c) f – strict descrescătoare. **5.** c), d) În cadranele II, IV. **10.** a) $f(x)=7x-3$; c) $f(x)=x\sqrt{2}-\sqrt{3}$. **14.** a) 1) Pentru $m\in(2,\ +\infty)$ funcția f este strict crescătoare; 2) pentru $m \in (-\infty, 2)$ funcția f este strict descrescătoare. Pentru $m = 2$ funcția f este constantă. **16.** $A = 2$, $B = 10$. **18.** $f(n) = 3 + 0 \cdot n$ sau $g(n) = 4 + (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

§ 3. **4.** a) $A:(0, +\infty) \to (0, +\infty)$, $A(a) = 6a^2$. **6.** a) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 0$. **7.** b), d) Funcția f nu are zerouri. **8.** 2) *Indicație.* Axa de simetrie este dreapta $x = -\frac{b}{2a}$. **10.** b) $E(f) = (-\infty; 2]$; e) $E(f) = [-0{,}25; +\infty)$. **13.** a) $a > 0, \Delta < 0$; d) $a < 0, \Delta = 0$. **16.** 1,11m; 1,78 m; 2 m; 1,78 m; 1,11m. **18.** a) *Indicație*. Pot fi determinate 4 funcții. **19.** Aria triunghiului mic $A_1(x) = \frac{ax^2}{2h}$; aria trapezului $A_2(x) = \frac{a(h^2 - x^2)}{2h}$. **20.** *Indicație*. a) Rezolvați ecuația $-2x^2 - 4 + 4 = -x + 2$ pentru a determina abscisele punctelor de intersecție. **21.** Legitatea este $x_1 - x_2$, unde x_1, x_2 sînt soluții ale ecuației asociate şi $x_1 > x_2$. **22.** a) $a \in \mathbb{R}_-^*$; b) $a \in \mathbb{R}_+^*$. **23.** $b = 6$, $c = 15$.

§ 4. **2.** a) 5; –4; $-\sqrt[3]{16}$; 1,5; –1; 0,1. **5.** a), b), d) Funcția f nu are extreme; c) $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 1$.

Exerciții și probleme recapitulative

1. b). **4.** a) f_3. **6.** $l = 2\pi r$. **7.** a) $y = 15 - 0{,}5x$. **15.** a) $x = 0$ – axă de simetrie; $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 3$; d) $x = \frac{1}{12}$ – axă de simetrie; $\min\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x) = 2\frac{23}{24}$. **17.** a) Se determină 4 funcții. **18.** *Indicație.* Rezolvați ecuația $f(x) = 0$ şi calculați valoarea $f(0)$. **20.** a) *Indicație.* Fie $2 + x = t$, atunci $x = 2 - t$. Deci, $f(t) = 5t - 7$. **22.** $b = 8$; $c = 12$.

Capitolul 3

§ 1. **3.** c) X^3Y^3Z; d) XY^2Z^3. **4.** 1) a) 3; d) 0; 2) b) 6; c) 3. **7.** b) $41X^4YZ^2$; c) $3XYZ^4$. **8.** c) $4X^4Y^{12}$; d) $3{,}375Y^9Z^3$. **9.** c) $2XZ^3$; d) $22X^2Y^2Z^2$. **10.** b) $3\frac{3}{4}ZY - Z^2 + XY$. **11.** b) $-2XY^2Z^4 + {} + 0{,}01X^3Y^5Z^2 + X^3Y^3Z^3$. **14.** Legitatea este puterea respectivă a monomului.

§ 2. **5.** b) $X(X-1)(X+1)^2$. **6.** b) $(0{,}5X+1)^2$; d) $(X+1)^3$. **7.** b) $(\sqrt{5}X - 3\sqrt{5})(\sqrt{5}X + 3\sqrt{5})$; c) $(5X-4)(25X^2+20X+16)$. **8.** c) $(2-X)(1+X)$. **10.** b) grad $P(X) = 3$; grad $Q(X) = 3$ pentru $m \in \mathbb{R}^*$ şi orice $k, p, n \in \mathbb{R}$; grad $Q(X) = 2$ pentru $m = 0$, $k \in \mathbb{R}^*$ şi orice $p, n \in \mathbb{R}$; grad $Q(X) = 1$ pentru $m = 0$, $k = 0$, $p \in \mathbb{R}^*$ şi orice $n \in \mathbb{R}$; grad $Q(X) = 0$ pentru $m = 0$, $k = 0$, $p = 0$ şi $n \in \mathbb{R}^*$. **12.** c) $(6X+1)(21X^2 - 3X + 1)$. **13.** a) $(X-2)(3X^2+2X+4)$; b) *Indicație*. Efectuați substituția $X^3 = Y$; d) $(X+1)(X^3 - X^2 + 2)$. **14.** *Indicație*. Rezolvați ecuațiile de gradul II asociate polinoamelor date. **16.** b) $Q(X) = -5X^4 + X^3 - 2X^2 + 8$. **18.** $P(X) = X^2$. **19.** a) *Indicație*. Efectuați substituția $X^4 = Y$; b) $(X^n - 2)(X^n + 2)(X^{2n} + 4)$; c) $X(X^n - 1)(X^n + 1)$.

§ 3. **3.** d) 159; e) 0; f) 6. **5.** b) $C(X) = -5X^3 - 6X^2 - 5X - 7$, $R(X) = -13$; d) $C(X) = X^7 - X^6 + {} + X^5 - X^4 + 3X^3 - 3X^2 + 3X - 3$, $R(X) = 4$. **7.** $P(X) = (X^3 - 2)(-2X + 1) + (-2X + 1)^2$. **8.** a) $a \in \{-5, 2\}$; b) $a \in \{-4, 1\}$; c) $a = -1$. **9.** $R(X) = X - 4$.

§ 4. **3.** a) F; b) A; c) F; d) F. **4.** a) Da; c) nu. **6.** a) –1, 1; b) 0, 2, 3; c) $\frac{1}{3}$; d) $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$. **8.** a) Nu; b) nu; c) da. **9.** a) 2; b) 3; c) 1. **10.** a) *Indicație*. Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} 3a + b = -2, \\ 6(a-b) = -5. \end{cases}$ **11.** $a = -5$, $b = 1$.

§ 5. **2.** b) $\frac{X^2 - 2X + 3}{X^2 - 9}$; c) $\frac{X^2 + 5X - 3}{3X(X+2)}$. **5.** b) 2; c) $\frac{2X^2 + 6X + 6}{X^2 - 9}$; e) $\frac{X^3 - X^2 - 6X - 16}{X^2 - 64}$; f) $\frac{X^3 - 3X - 1}{X^2 - 1}$. **6.** a) $2X$; c) $-\frac{X + 10}{2X^3}$; d) $\frac{X^2 - 4X + 4}{X + 2}$; f) $\frac{X^2}{(X+2)^2(X^2+1)(X-2)}$. **8.** a) $E(X) = X + 5 + \frac{12}{X-2}$; b) $a \in \{-10, -4, -2, -1, 0, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 14\}$.

Exerciții şi probleme recapitulative

2. b) $P(X)+Q(X)=-3X^3-X^2+6X+1$; $P(X)-Q(X)=3X^3-X^2-6X-3$; $P(X)\cdot Q(X)=$ $=3X^5-3X^3-2X^2-6X-2$. **3.** a) $27X^3+54X^2+36X+8$; d) $27X^3+1$. **5.** b) $\left(Z-\frac{1}{2}\right)^2$; d) $(3X-1)^2$. **6.** a) $-(Y+20)(9Y+20)$; b) $4X(X-9)$; d) $(Z-\sqrt{5})(Z+\sqrt{5})(Z^4+5Z^2+25)$. **7.** b) $(Y-2)(2Y^2+1)$; d) $(X+1)(X^2+\sqrt{3})$. **8.** b) $C(X)=3X^2+5X-7$; $R(X)=X-1$. **9.** b) –101. **11.** a) –2,25. **13.** *Indicație*. Aplicați teorema lui Viète pentru ecuația asociată polinomului $P(X)$.

Capitolul 4

§ 1. **3.** a) $\mathbb{R}$; b) $\mathbb{R}\setminus\{5\}$; c) $\mathbb{R}$. **4.** a) $S=\{0{,}5\}$; c) $S=\{-8\}$; f) $S=\left\{-\frac{7}{15}\right\}$. **7.** a) $S=\mathbb{R}$; b) $S=\left\{\frac{7}{8}\right\}$; c) $S=\left\{-\frac{16}{29}\right\}$. **8.** *Indicație*. a) $\frac{1}{x-5}=t$; b) $\frac{x+2}{x}=t$; c) $\frac{t}{t+1}=z$; d) $\frac{a+3}{a}=t$. **10.** *Indicație*. Legitatea este $z_1\cdot z_2=30$, unde z_1, z_2 sînt soluțiile ecuațiilor din stînga şi respectiv din dreapta lui 30. **11.** *Indicație*. Legitatea este $x_1^{x_2}=81$, unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuațiilor din stînga şi respectiv din dreapta lui 81. **13.** a) $S=\{-2\}$; c) $S=\{6{,}5\}$; e) $S=\left\{-3\frac{1}{3}\right\}$. **14.** a) $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; b) $S=\{-4, 4\}$; c) $S=\left\{-1, -\frac{1}{3}\right\}$; d) $S=\left\{-\frac{4}{11}, \frac{8}{9}\right\}$. **15.** a) Pentru $m=3$, $S=\varnothing$; pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$, $S=\left\{\frac{10}{m-3}\right\}$; b) pentru $m=0$, $S=\varnothing$; pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $S=\left\{\frac{2(2-m)}{3m}\right\}$.

§ 2. **2.** a) $S=\{-4, 4\}$; b) $S=\{-5, 5\}$; c) $S=\left\{-\frac{2}{5}, 0\right\}$; d) $S=\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$; e) $S=\varnothing$; f) $S=\varnothing$; g) $S=\{0\}$; h) $S=\{0\}$. **3.** a) $S=\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; b) $S=\left\{\frac{2}{5}, 1\right\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\varnothing$. **4.** a) $S=\{1\}$; b) $S=\{2, 6\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\{-2\}$; e) $S=\{-1, 4\}$; f) $S=\varnothing$. **8.** a) $(x-3)(x+1)$; d) $-(x+1)(3x+2)$; e) $-(x-4)(x+1)$. **9.** a) $S=\{1\}$; b) $S=\varnothing$. **10.** 1) a) $-\frac{3}{5}$; b) $-1\frac{4}{5}$; c) $3\frac{24}{25}$; d) $-2\frac{1}{5}$. **11.** 5, 20. *Indicație*. Aplicați relațiile lui Viète; problema conduce la o ecuație de gradul II. **12.** 1; 3. **13.** a) $S=\varnothing$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}$. **14.** a) $S=\{-2, -1, 1, 2\}$; b) $S=\varnothing$; e) $S=\{-1, 1\}$; f) $S=\{-1, 1\}$. **15.** a) *Indicație*. Legitatea este $x_1^2+x_2^2=5$, unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației date; b) *Indicație*. Legitatea este $t_1^2-t_2^2=\frac{8}{9}$, unde t_1, t_2 sînt soluțiile ecuației date. **17.** a) $S=\{0\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{0\}$; d) $S=\{-1\}$; e) $S=\varnothing$. **20.** a) –1, 1,5; c) –1, 1; d) $-\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}$. **21.** a) $(t-1)(t+1)(t^2+2)$; b) $(t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})(t^2+1)$. **22.** *Indicație*. Grupați factorii şi faceți substituția: a) $x^2-3x=t$; b) $x^2+7x=t$. **23.** a) *Indicație*. Cum $x^2=|x|^2$, faceți substituția $|x|=t$. **26.** a) Pentru $m=0$, $S=\left\{-\frac{1}{3}\right\}$; pentru $m=-\frac{9}{4}$, $S=\left\{-\frac{2}{3}\right\}$; pentru $m\in\left(-2\frac{1}{4}, +\infty\right)\setminus\{0\}$, $S=\left\{\frac{3-\sqrt{9+4m}}{2m}, \frac{3+\sqrt{9+4m}}{2m}\right\}$; pentru $m\in\left(-\infty, -2\frac{1}{4}\right)$, $S=\varnothing$; b) *Indicație*. Cercetați cazurile: 1) $m-2=0$; 2) $m-2\neq 0$. e) *Indicație*. Cercetați cazurile: 1) $m=0$; 2) $m\neq 0$.

§3. **2.** a) 1; c) –1. **3.** a) $S=\left\{\frac{1}{2}\right\}$; b) $S=\{-6\}$; c) $S=\left\{\frac{\sqrt{5}}{5}\right\}$; d) $S=\{3\sqrt{2}\}$. **4.** a) $S=\left\{3\frac{2}{3}\right\}$; b) $S=\left\{-2\frac{2}{3}\right\}$; c) $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$; d) $S=\left\{-\frac{6}{7}\right\}$. **5.** a) $S=\{0\}$; b) $S=\varnothing$; c) $S=\{0\}$; d) $S=\{0, 6\}$. **6.** a) $S=\left\{8\frac{5}{8}\right\}$; c) $S=\{0, 12\}$. **7.** a) $S=\left\{0, 3\frac{1}{5}\right\}$; c) $S=\varnothing$. **9.** a) $S=\mathbb{Q}\setminus\{-3\}$; c) $S=\mathbb{Q}\setminus\{4\}$. **10.** c) $S=\varnothing$; d) $S=\{-5\}$. **12.** a) *Indicație*. Legitatea este $(x-x_1)(x-x_2)=0$, unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației date; b) *Indicație*. Legitatea este $\frac{x+x_1}{x+x_2}=0$, unde x_1, x_2 sînt soluțiile ecuației date. **14.** c) $S=\{-5\sqrt{2}, 0, 5\sqrt{2}\}$. *Indicație*. DVA: $\mathbb{R}\setminus\{-8, -6, 6, 8\}$. Numitorul comun va fi $(t^2-36)(t^2-64)$. **15.** d) DVA: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. 1) Pentru $m-3<0$, $S=\varnothing$; 2) pentru $m-3=0$ rezolvați ecuația $x+\frac{1}{x}-3=0$; 3) pentru $m-3>0$ rezolvați ecuațiile $x+\frac{1}{x}-3=m-3$, $x+\frac{1}{x}-3=-(m-3)$. **16.** a) *Indicație*. Scrieți funcția f sub forma $f(x)=\frac{x^2+2x+1-x}{x^2+2x+1}=1-\frac{x}{(x+1)^2}$; b) *Indicație*. Cercetați funcția $f(x)=1+\frac{x}{(x-1)^2}$.

§4. **2.** b) $S=\{(0{,}2; -0{,}6)\}$; d) $S=\left\{\left(11\frac{3}{7}, -1\frac{17}{21}\right)\right\}$. **3.** b) $S=\left\{\left(-\frac{15}{17}, 3\frac{12}{17}\right)\right\}$; d) $S=\left\{\left(1, \frac{1}{2}\right)\right\}$. **6.** a) $S=\{(0, -1)\}$; b) $S=\left\{\left(7\frac{6}{11}, 5\frac{3}{11}\right)\right\}$; c) $S=\{(-1, 2)\}$; f) $S=\{(0, 0)\}$. **7.** b) $S=\{(-2, 12)\}$; d) $S=\left\{\left(\frac{2}{5}, 2\frac{1}{5}\right)\right\}$. **8.** *Indicație*. Legitatea este $x+y=2{,}82$, unde (x, y) este soluția sistemului. **9.** a) $S=\{(2, 1)\}$; b) $S=\varnothing$. **10.** *Indicație*. a) Efectuați substituția $\frac{1}{x}=u$, $\frac{1}{y}=v$; b) efectuați substituția $\frac{1}{x-1}=u$, $\frac{1}{y-1}=v$; c) efectuați substituția $x^2=u$, $\frac{1}{y-1}=v$. **11.** 18 km/h; 24 km/h. **13.** 2 km/h. **14.** $a=5$.

§5. **1.** 1, 11. **2.** 25, 10; –10, –25. **4.** 43 cm, 40 cm. **6.** 160 km, 120 km. **7.** *Indicație*. $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{ba}=10b+a$. **10.** 20 de ore, 30 de ore. **12.** $\frac{12-2\sqrt{33}}{3}$, $\frac{12+2\sqrt{33}}{3}$. **15.** 25,5 lei, 39 lei. **16.** *Indicație*. Alcătuiți ecuația $y^2-x^2=225 \Leftrightarrow (y-x)(y+x)=225$, unde x – lungimea catetei, iar y – lungimea ipotenuzei. Descompuneți numărul 225 în produs de numere naturale. *Răspuns*: 4 triunghiuri. **17.** *Indicație*. Fie $x, y\in\mathbb{N}^*$. Rezolvați în $\mathbb{N}^*$ ecuația $(x-y)(x+y)=45$. **18.** 20 de camioane. **20.** 120 m.

Exerciții și probleme recapitulative

1. b) $S=\left\{1\frac{4}{11}\right\}$; d) $S=\left\{-13\frac{2}{3}\right\}$. **2.** b) $S=\{0\}$; c) $S=\varnothing$; d) $S=\varnothing$; e) $S=\{-1, 4\}$; f) $S=\varnothing$. **3.** d) $S=\{-12, 15\}$; e) $S=\{-15, 10\}$; f) $S=\{-8, 4\}$. **4.** b) $(3-X)(2X+1)$; c) $(4X+1)^2$. **5.** b) $S=\left\{-\frac{1}{4}\right\}$; d) $S=\varnothing$. **6.** d) $S=\{(2, 8)\}$; e) $S=\{(1, 2)\}$; f) $S=\{(1{,}5\sqrt{2}; -5)\}$. **7.** b) $S=\left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$; d) $S=\left\{-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$. **8.** 48 de apartamente de 2 camere şi 16 apartamente de 4 camere. **10.** 31 lei. **11.** a) $S=\{-2\}$; b) $S=\left\{-\frac{8}{9}\right\}$; c) $S=\{-1, 1\}$; e) $S=\{-2\}$. **13.** *Indicație*. Aplicați teorema lui Viète. **14.** a) $(x-1)^2(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$; b) *Indicație*. Efectuați substituția $(2x-1)^2=t$;

c) *Indicație*. Efectuați substituția $(x-2)^2$; d) $(t-\sqrt{2})^2(t+\sqrt{2})^2$. **16.** a) $S=\{(-2,-1)\}$; c) $S=\{(-16{,}5;-49{,}5)\}$. **19.** 28%. **20.** $\frac{3+15\sqrt{103}}{26}, \frac{-15+3\sqrt{103}}{26}$; $\frac{3-15\sqrt{103}}{26}, \frac{-15-3\sqrt{103}}{26}$.
21. *Indicație*. Legitatea este $-5=xy$; $-4=-(x+y)$, unde (x, y) este soluția sistemului dat.
22. *Indicație*. Legitatea este $x^2+y^2=17$, unde (x, y) este soluția sistemului dat. **23.** b) $-1, 1\frac{1}{3}$; c) $-\sqrt{5}, \sqrt{5}$. **25.** a) $S=\left\{-1; -\frac{1}{2}; 1; 1{,}5\right\}$; b) $S=\{-3, -1{,}1\}$; c) $S=\left\{1\frac{1}{5}\right\}$. **26.** *Indicație*. a) Fie $x^2=u$, $y^2=v$; c) fie $x+y=t$, $xy=v$. **27.** Fiul are 13 ani, tata 39 de ani, mama 32 de ani.

Capitolul 5

§1. 3. a) $S=(-\infty, 2)$; b) $S=(-\infty, -2)$; c) $S=(-\infty, -1]$; d) $S=\left[-\frac{7}{8}, +\infty\right)$. **4.** a) $S=\{0, 1, 2, 3, 4\}$; b) $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **5.** a) $S=\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$; b) $S=\varnothing$; c) $S=[2{,}5; +\infty)$; d) $S=\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$.
8. a) $S=(-\infty; -0{,}5)$; b) $S=(3, +\infty)$; e) $S=(3, +\infty)$. **9.** a) $S=\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$; c) $S=\varnothing$; d) $S=[2{,}5; +\infty)$. **10.** a) $x\in[2, +\infty)$; b) $x\in\left(-\infty, \frac{4}{5}\right)$; c) $x\in(3, 10]$. **11.** a) $S=(1, 4)$; c) $S=[-2, 2]$; d) $S=(-3, 4)$. **12.** 25 de cărți. **13.** $x\in(3, 13)$; **14.** 24 de locuri. **15.** $\frac{3}{8}$.
16. b) $S=\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right]\cup\left[\frac{8}{3}, +\infty\right)$; c) $S=\left(-4, -\frac{2}{3}\right)$. **17.** a) $a\in(-\infty, 2)$; b) $a\in(-\infty, 3)$.
18. d) $a\in(-\infty, -2)$. **19.** $a\in(-2, +\infty)$. **20.** a) $a\in\{-5\}$; b) $a\in(-\infty, -5)$; c) $a\in(-5, +\infty)$.

§2. 3. a) $S=\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$; b) $S=(-\infty, -8)\cup(6, +\infty)$; c) $S=\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right]$; d) $S=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{5}\right\}$; e) $S=\left\{\frac{2}{7}\right\}$; f) $S=\mathbb{R}$; g) $S=(-\infty, 0)\cup(7, +\infty)$; h) $S=\left(-1, \frac{5}{4}\right)$; i) $S=(-\infty, -4]\cup[4, +\infty)$; j) $S=(-3, 3)$; k) $S=\left\{\frac{1}{4}\right\}$; l) $S=\mathbb{R}$. **4.** a) $S=(-\infty, -8)\cup(5, +\infty)$; b) $S=[-2, 0]$; c) $S=(-6, 5)$; d) $S=(-\infty, -4)\cup[-1, +\infty)$; e) $S=\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$. **5.** a) $S=(-\infty, -2)\cup(1, +\infty)$; b) $S=[-5, -3]$; d) $S=(-\infty; -1]\cup[4{,}5; +\infty)$. **7.** a) $S=\left[-1, \frac{3}{2}\right]$; b) $S=\mathbb{R}$; c) $S=(-5, 4)$; d) $S=\varnothing$.
8. a) $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$; b) $(-\infty, -4)\cup(0, +\infty)$. **9.** a) $S=(-\infty, -2)\cup(0, 3)$; b) $S=(-\infty, -5]\cup\left[-\frac{1}{2}, 3\right]$; c) $S=(-\infty, 1]\cup[2, 3]$; d) $S=(-\infty, -2)\cup(-1, 0)\cup(4, +\infty)$; e) $S=\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$; f) $S=(-\infty, -1]\cup(0, 2]$; g) $S=[-2, 1)\cup[3, +\infty)$. **10.** Da, poate fi decupat. **11.** a) $S=\left(-\frac{5}{3}, -\frac{9}{8}\right]$. **12.** $S=\{2, 3, 4, 5\}$.
13. a) $S=\varnothing$; b) $S=[-5, 0]$; c) $S=(1, 4)$. **14.** a) $x\in[-5, 1)\cup(1, 6]$; b) $x\in[-10, -6]\cup[7, 10]$.
15. a) $S=[1, 2]\cup[3, 4]$; b) $S=(-3, -1)\cup(-1, 1)$. **16.** b) $m\in(-\infty, -5)$. **17.** b) $a\in\left(0, 1\frac{1}{4}\right)$.

Exerciții și probleme recapitulative

5. -3. **6.** a) $\left[-\frac{3}{2}, 2\right]$; b) $\left[-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$; c) $\left(-\frac{1}{3}, 2\right]$; d) $(-\infty, -1]\cup\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$. **9.** a) $S=(-4, -1)$.
10. $S=\left(\frac{3}{5}, 5\right)$. **11.** $S=(-\infty, -6)\cup\{-1\}\cup(2, +\infty)$. **12.** Nu există atare valori. **13.** $a\in(-\infty, -3]\cup[1, +\infty)$.

Geometrie

Capitolul 1

§ 1. **5.** 36°, 144°, 144°. **6.** a) 45°, 45°; b) 75°, 105°; c) 9°, 81°; d) 70°, 70°. **9.** 30°. **10.** a) 0,625; b) $2\frac{2}{3}$. **11.** a) $\frac{5}{9}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $\frac{7}{16}$; d) 4,2. **12.** a) $2\frac{1}{3}$; b) $\frac{4}{7}$; c) $2\frac{1}{3}$; d) $\frac{4}{11}$. **13.** a) 9,6 cm; b) 5cm.

14. 

15. 

17. 11 ori. **21.** *Indicație*. Utilizați egalitatea $\frac{1}{2}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$.

§ 2. **1.** a) Da; b) nu; c) da; d) da. **3.** a) 62 cm; b) $24\sqrt{5}$ cm. **4.** $m(\angle A)=40°$, $m(\angle B)=20°$, $m(\angle C)=120°$. **8.** a) 37 cm; b) 72 cm; c) 78 cm. **9.** a) 78°5′6″; b) 154°54′53″; c) 72°4′4″; d) 69°25′4″. **10.** 10 cm; 12 cm; 10 cm; 12 cm. **11.** a) $M_1(3;\ 0)$; b) $M_1(-0{,}4;\ 0)$. **12.** a) $(3-\sqrt{7})$ cm; b) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})$ cm. **13.** a) 15 cm; b) 8 cm. **14.** a) 90°, 130°, 140°; b) 70°, 145°, 145°; c) 100°, 110°, 150°. **15.** a) $PM=12$ cm, $PN=15$ cm; b) $AP=2\sqrt{6}$ cm, $BP=2\sqrt{7}$ cm. **16.** 55°, 125°, 125°. **17.** 70°, 70°, 110°, 110°. **18.** a), b) $m(\angle A)=m(\angle D)=75°$, $m(\angle B)=m(\angle C)=105°$. **19.** a) $m(\angle A)=m(\angle B)=90°$, $m(\angle C)=120°$, $m(\angle D)=60°$; b) $m(\angle A)=70°$, $m(\angle B)=110°$, $m(\angle C)=m(\angle D)=90°$. **20.** Între șirurile din b) și între cele din d).

21. a)

4	6	10	12	9
12	18	30	36	27

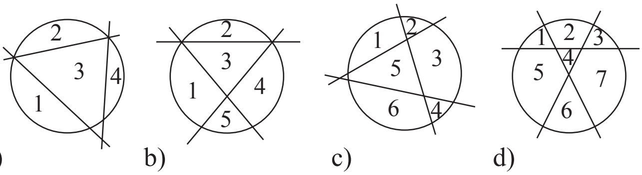
b)

0,2	1	1,8	2	3,2	2,4
1	5	9	10	16	12

22. a) 65; b) 90. **23.** $18\sqrt{3}$ cm. **24.** a) 60°, 60°, 120°, 120°; b) 6 unghiuri de 60°. **25.** 15 cm. **26.** 18 cm. **27.** a) 30°, 30°, 120°; b) 12 cm. **28.** 34 cm. **29.** 80 cm. **30.** a) $D\ (-3;\ -4)$; b) $D\ (2;\ -3)$. **31.** 4. **32.** AB = 10 cm, AH = 6,4 cm, BH = 3,6 cm, CH = 4,8 cm. **33.** 5 cm. **34.** $AB=9$ cm, $AC=9\sqrt{3}$ cm. **35.** 13 cm și $h=12$ cm. **36.** 60°, 60°, 120°, 120°. **37.** $AB=15$ cm, $BC=25$ cm. **38.** 26 cm. **39.** 2 cm. **41.** 30 cm.

Capitolul 2

§ 1. **4.** a) 8 cm; b) 7 cm; c) $2\sqrt{10}$ cm; d) 2 cm. **5.** a) 12 cm; b) 5 cm; c) 15 cm. **6.** a) Secantă cercului; b) secantă cercului; c) tangentă la cerc; d) secantă cercului; e) exterioară cercului. **7.** $R=10$ cm, $AC=10\sqrt{3}$ cm, $BM=5$ cm. **8.** a) 13,7 cm; b) 3,(4) cm; c) 8 cm. **9.** a) Secantă cercului; b) secantă cercului; c) exterioară cercului; d) tangentă la cerc. **10.** a) 3 cm; b) 5 cm; c) $\frac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2}$. **11.** a) 10 cm; b) 1,5 cm. **12.** 60°. **15.** 30°. **16.** 12 cm. **17.** a) $M\in \operatorname{Int}\Delta ABC$; b) $M\in \operatorname{Int}\Delta ABC$; c) dacă $r>2$, atunci $M\in \operatorname{Int}\Delta ABC$; dacă $r=2$, atunci $M\in \mathscr{C}(O,\ 2)$; dacă $0<r<2$, atunci $M\in \operatorname{Ext}\Delta ABC$. **18.** 20 cm. **19.** 10 cm. **20.** 7 cm. **21.** 7,5 cm. **22.** $\sqrt{15}$ cm. **24.** a) 1; b) 30; c) $\sqrt{x^2+y^2}$. **26.** $(12+\sqrt{11})$ cm. **30.** 20 cm sau 40 cm. **31.** 8 cm, 15 cm. **32.** 5 cm. **35.**



a) b) c) d)

36. 60 cm.

§ 2. **2.** a) 45°; b) 90°; c) 125°. **3.** a) $MN = KL$; b) $MN < KL$; c) $MN = KL$. **4.** a) 44°; b) 152°; c) 17°30′; d) 80°. **5.** a) 120°; b) 72°; c) 36°; d) 30°; e) 30°; f) 15°. **11.** Pătrat. **12.** Dreptunghi. **13.** a) 50°; b) 40°; c) 65°. **14.** O oră. **15.** 40°. **16.** 90°, 120°, 60°, 90°. **17.** 180°, 90°, 60°, 30°. **18.** 18,5 cm. **19.** a) 3 coarde şi 6 arce. **20.** Măsurile arcelor vor fi egale cu 10°, 30°, 60°, 70°, 80°, 110°. **21.** a) 90°; b) 35°; c) 55°; d) 20°. **22.** a) 120°; b) 150°; c) 24°; d) 210°. **23.** 6 cm. **24.** $\frac{16\sqrt{3}}{3}$ cm. **25.** 80° sau 100°. **26.** $20\sqrt{3}$ cm. **27.** 17 cm. **28.** a) 64°; b) 117°; c) 48°; d) 57°. **33.** 18,75 cm. **34.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$ cm.

§ 3. **3.** a) 36 cm; b) 54 cm. **4.** a) 50°; b) 30°; c) 160°; d) 60°. **5.** a) 52°, 62°, 66°; b) 35°, 70°, 75°. **6.** a) 2,5 cm, 6,5 cm, 5,5 cm; b) 5 cm, 9 cm, 8 cm. **7.** a) Ascuțitunghic; b) obtuzunghic; c) dreptunghic; d) dreptunghic. **8.** AM = 18 cm, BK = 7 cm. **9.** a) 36°; b) 70°; c) 110°; d) 75°. **12.** a), c) – da; b), d) – nu. **13.** 5 cm. **14.** a) 75°, 52°30′, 52°30′; b) 68°, 64°, 48°; c) 37°, 71°, 72°. **16.** a) 100°, 20°, 60°; b) 50°, 84°, 46°; c) 92°, 76°, 12°. **17.** 5 cm, 5 cm, 6 cm. **19.** $\sqrt{130}$ cm. **20.** $2\sqrt{7}$ cm.

Exerciții și probleme recapitulative

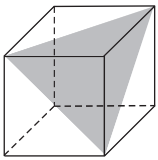
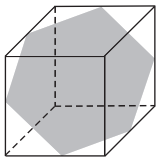
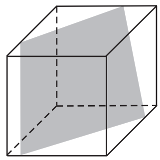
3. 5 cm. **4.** 6 cm. **5.** $2\sqrt{13}$ cm. **7.** a) 60°; b) 17°; c) 67°. **9.** a) 6 cm; b) $4\sqrt{7}$ cm. **10.** a) 12 cm; b) 0,5 cm. **11.** a) 52° sau 128°; b) 74°; c) 46°; d) 61°. **12.** a) 30°; b) 150°; c) 270°. **14.** $4\sqrt{2}$ cm. **16.** $AM = (3\sqrt{2} + 2\sqrt{17})$ cm; $BD = 2\sqrt{34 - 3\sqrt{34}}$ cm. **17.** 8,125 cm. **18.** $3\sqrt{13}$ cm.
19. a) $m(\angle A) = 115°$, $m(\angle B) = 40°$, $m(\angle C) = 25°$; b) $m(\angle A) = 120°$, $m(\angle B) = 37°$, $m(\angle C) = 23°$.
20. a) $m(\angle A) = 94°$, $m(\angle B) = 106°$, $m(\angle C) = 86°$, $m(\angle D) = 74°$; b) $m(\angle A) = 97°30'$, $m(\angle B) = 140°$, $m(\angle C) = 82°30'$, $m(\angle D) = 40°$.

Capitolul 3

7. a) 7,3 cm, 2,5 cm; b) $11\sqrt{2}$ cm, $5\sqrt{2}$ cm; c) $\frac{2}{3}$ cm, $\frac{7}{9}$ cm; d) 16 cm, 2 cm. **8.** 17 m. **11.** a) $\mathcal{A} = 2\sqrt{110}$ cm²; c) $\mathcal{A} = 10\sqrt{11}$ cm². **12.** a) $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} = 49{,}5$ cm²; $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{DCB} = 36$ cm²; b) $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} = 87{,}5$ cm²; $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{DCB} = 50$ cm²; c) $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} = 53{,}25$ cm²; $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{DCB} = 45$ cm²; d) $\mathcal{A}_{ABC} = \mathcal{A}_{ABD} = 21\sqrt{2}$ cm²; $\mathcal{A}_{ADC} = \mathcal{A}_{DCB} = \frac{42\sqrt{2} - 49}{2}$ cm². **15.** 81 cm². **16.** 42 cm. **17.** 52 cm². **18.** 4π m². **19.** a) $24\sqrt{3}$ cm²; b) $32\sqrt{2}$ cm²; c) $80\sin 36°$ cm². **20.** a) $P = 48$ cm, $\mathcal{A} = 144$ cm²; b) $P = 36\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{A} = 162$ cm²; c) $P = 4a$ cm, $\mathcal{A} = a^2$ cm²; d) $P = 2x\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{A} = \frac{x^2}{2}$ cm². **21.** a) De 9 ori; b) de 49 de ori; c) de n^2 ori. **22.** a) De 2 ori; b) de $\sqrt{10}$ ori; c) de $4 - \sqrt{11}$ ori. **23.** a) De 4 ori; b) de 25 de ori; c) de $\frac{8}{3}$ ori. **24.** 99 cm². **25.** 63 cm². **26.** 216 cm². **27.** 27%. **28.** $(144\sqrt{2} - 96)$ cm². **29.** a) 400g; b) 2100 g. **30.** 48 cm². **31.** 15 cm². **32.** 900 cm². **33.** 13 cm. **34.** 70 cm². **35.** $\frac{S(m+2n)}{2(m+n)}$. **36.** $P = 128$ cm, $\mathcal{A} = 480$ cm². **37.** $\frac{135}{2}$ cm². **38.** Înălțimea corespunzătoare bazei triunghiului ABC. **39.** π m. **40.** 6 cm². **41.** 294 cm². **42.** 170 cm². **43.** $3r^2\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Capitolul 4

§ 1. **3.** b). **4.** $\mathcal{A}=54\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=27\ \text{cm}^3$. **5.** $\mathcal{V}=64\ \text{cm}^3$, $\mathcal{A}=96\ \text{cm}^2$. **6.** $\mathcal{A}=24\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=8\ \text{cm}^3$. **7.** 27 *l*. **9.** $150\ \text{cm}^2$. **10.** $8\ \text{cm}^3$. **11.** 7,2 kg. **12.** $6\sqrt{3}$ cm. **13.** $3(2+\sqrt{3})$ cm. **14.** a) $4\sqrt{3}$ cm; b) $4\sqrt{2}$ cm. **15.** $\mathcal{A}=1\,536\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=4\,096\ \text{cm}^3$.

16. a)  b)  c) 

§ 2. **4.** $\mathcal{A}=214\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=210\ \text{cm}^3$. **5.** $\mathcal{A}_l=156\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=236\ \text{cm}^2$, $d=5\sqrt{5}$ cm. **6.** $188\ \text{cm}^2$. **7.** $960\ \text{cm}^3$. **8.** $\mathcal{A}_l=96\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=126\ \text{cm}^2$. **9.** $\mathcal{A}_l=126\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=63\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **10.** $\mathcal{A}_l=36\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=44\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **11.** $18\ \text{cm}^2$. **12.** $\mathcal{A}_t=(96+32\sqrt{3})\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=64\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **13.** $\dfrac{45\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^3$. **14.** $\mathcal{A}_t=(105+50\sqrt{3})\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\dfrac{175\sqrt{3}}{4}\ \text{cm}^3$. **15.** $\sqrt{7}$ cm. *Indicație.* Dacă x, y, z sînt dimensiunile paralelipipedului, atunci $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ este lungimea diagonalei. **16.** $\mathcal{A}_l=112\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=144\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=112\ \text{cm}^3$. **17.** $200\ \text{cm}^3$. **18.** $\mathcal{A}_l=288\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=360\ \text{cm}^2$.
19. $19\sqrt{3}$ kg $\approx 32{,}87$ kg. **20.** $\mathcal{A}_t=290\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=300\ \text{cm}^3$. **21.** $\mathcal{A}_l=128\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=160\ \text{cm}^2$. **22.** $\mathcal{A}_l=90\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=(90+27\sqrt{3})\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\dfrac{135\sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3$. **23.** $216\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **24.** $120\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **25.** b). **26.** $160\ \text{cm}^3$. **27.** $19\dfrac{1}{21}$. **28.** $364{,}5\ \text{cm}^3$. **29.** $10\ \text{cm}^2$. **30.** $\mathcal{A}_l=120\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=(120+12\sqrt{3})\ \text{cm}^2$. **31.** $12\ \text{m}^3$. **32.** 1,2 cm. **33.** a) $2\sqrt{38}$ cm; b) $248\ \text{cm}^2$.
34. a) $\mathcal{A}_l=288\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=32(9\sqrt{3}+2)\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=384\sqrt{3}\ \text{cm}^3$; b) 24 cm.
35. $\mathcal{A}_t=(32\sqrt{3}+144)\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=96\sqrt{3}\ \text{cm}^3$.

§ 3. **1.** $45\ \text{cm}^2$. **2.** $\mathcal{A}_l=45\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=72\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=36\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **3.** $9\ \text{cm}^2$. **4.** $\mathcal{A}_t=(36\sqrt{3}+72)\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=24\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **5.** $63\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. **6.** b). **7.** $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}\text{cm}^3$. **8.** $\mathcal{A}_l=60\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=48\ \text{cm}^3$. **9.** $\mathcal{A}_t=360\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=400\ \text{cm}^3$. **10.** $\mathcal{A}_t=100\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=36\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **11.** $\mathcal{A}_l=80\ \text{cm}^2$, $\mathcal{A}_t=144\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=64\ \text{cm}^3$. **12.** $\mathcal{A}_t=(24\sqrt{3}+48)\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=16\sqrt{3}\ \text{cm}^3$. **13.** a) $\mathcal{P}=24$ m, $\mathcal{A}_l=144\ \text{m}^2$, $\mathcal{A}=180\ \text{m}^2$; b) $\mathcal{P}=52$ m, $\mathcal{A}_l=520\ \text{m}^2$, $l=20$ m; c) $\mathcal{P}=36$ m, $a=9$ m, $\mathcal{A}=369\ \text{m}^2$; d) $a=11$ m, $l=18$ m, $\mathcal{A}=517\ \text{m}^2$; e) $a=8$ m, $\mathcal{P}=32$ m, $l=22$ m. **14.** $\mathcal{A}_l=60\sqrt{2}\ \text{cm}^2$. **16.** 6 cm. **17.** $(48\sqrt{3}+96)\ \text{cm}^2$. **18.** $\dfrac{432\sqrt{3}}{3}\ \text{cm}^3$. **19.** $\sqrt{5}$. **20.** $\mathcal{A}_l=150\sqrt{7}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\dfrac{1000}{3}\ \text{cm}^3$. **21.** $\mathcal{A}_t=384\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=384\ \text{cm}^3$. **22.** a) $\mathcal{A}_t=16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $\mathcal{V}=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}\ \text{cm}^3$; b) $\dfrac{1}{9}$. **23.** $64\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

§ 4. **6.** 24 cm. **7.** 5 cm. **8.** 7 cm. **9.** 20 cm. **10.** $\dfrac{\sqrt{2279}}{2}$ cm. **11.** 4 cm. **12.** $16\ \text{cm}^2$. **13.** 25 cm. **14.** 4 cm. **15.** Nu, deoarece prelungirile muchiilor laterale nu sînt concurente în același punct. **16.** $3\sqrt{3}$ cm.

Exerciții și probleme recapitulative

1. a) 720°; b) 1 080°; c) 1 440°. **2.** $10\sqrt{\frac{2}{3}}$ cm. **3.** $\frac{128\sqrt{2}}{3}$ cm^3. **4.** $\mathcal{A}_t = 232$ cm^2, $\mathcal{V} = 224$ cm^3.
5. $\mathcal{A}_t = 216$ cm^2. **6.** $\mathcal{A}_t = 96$ cm^2, $\mathcal{V} = 32\sqrt{3}$ cm^3. **7.** $\mathcal{A}_t = 24$ cm^2, $\mathcal{V} = 12\sqrt{3}$ cm^3.
8. a) $\mathcal{A}_t = 594$ cm^2, $\mathcal{V} = 810$ cm^3; b) 56,25 cm^2. **9.** $\mathcal{A}_t = 16\sqrt{3}$ cm^2, $\mathcal{V} = 8\sqrt{3}$ cm^3.
10. a) $4\sqrt{3}$ cm; b) 192 cm^3. **11.** $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm. **12.** $h = 3{,}75$ cm, $\mathcal{V} = 281{,}25$ cm^3. **13.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^3.
14. 1 224 cm^3. **15.** 252 cm^2. **16.** $AB = 4\sqrt{2}$ cm, $\mathcal{V} = 128\sqrt{2}$ cm^3. **17.** 148 cm^2.
18. $d = 3\sqrt{11}$ cm, $\mathcal{A}_t = 190$ cm^2. **19.** $\mathcal{A}_t = (18\sqrt{3} + 288)$ cm^2, patru diagonale de $2\sqrt{43}$ cm şi două de $4\sqrt{13}$ cm. **20.** $\mathcal{A}_t = 940$ cm^2, $\mathcal{V} = 4\,200$ cm^3. **21.** $\mathcal{A}_t = 16\sqrt{3}$ cm^2, $\mathcal{V} = \frac{8\sqrt{5}}{3}$ cm^3.
22. a) 18 cm; b) $\sqrt{10}$ cm; c) $\frac{108\sqrt{30}}{3}$ cm^3. **23.** $\frac{8\sqrt{11}}{3}$ cm. **24.** $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ cm^3.

Capitolul 5

§ 1. **3.** a), c) Da; b) nu. **5.** a) $\mathcal{A} = 150\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 250\pi$ cm^3; b) $\mathcal{A} = 6\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 2\pi$ cm^3; c) $\mathcal{A} = 0{,}96\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 0{,}128\pi$ cm^3. **6.** $\mathcal{A} = 130\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 200\pi$ cm^3. **7.** 96π cm^3 sau 72π cm^3.
8. a) $\mathcal{A} = \left(192\sqrt{3} + \frac{288}{\pi}\right)$cm^2, $\mathcal{V} = \frac{1152\sqrt{3}}{\pi}$ cm^3 sau $\mathcal{A} = \left(192\sqrt{3} + \frac{96}{\pi}\right)$cm^2, $\mathcal{V} = \frac{1152}{\pi}$ cm^3;
b) $\mathcal{A} = \left(100 + \frac{50}{\pi}\right)$cm^2, $\mathcal{V} = \frac{250}{\pi}$ cm^3; c) $\mathcal{A} = \left(\frac{128}{\pi} + \frac{256}{\sqrt{3}}\right)$cm^2, $\mathcal{V} = \frac{1\,024}{\pi\sqrt{3}}$ cm^3 sau
$\mathcal{A} = \left(\frac{128}{3\pi} + \frac{256}{\sqrt{3}}\right)$cm^2, $\mathcal{V} = \frac{1\,024}{3\pi}$ cm^3. **9.** 40π cm^2. **10.** a) 60 cm^2; b) 8 cm^2; c) $2x^2\sqrt{3}$.
11. a) 192π cm^2; b) $36\sqrt{2}\pi$ cm^2. **12.** a) 375 kg; b) 60,8 kg. **13.** 66π cm^2. **14.** A doua.
15. $\mathcal{A} = 125\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 187{,}5\pi$ cm^3. **16.** $\mathcal{A} = 130\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 200\pi$ cm^3. **17.** 4 cm.
19. 1350 cm^3. **20.** $12\sqrt{2}$ cm, $\approx 48\%$. **21.** 22 de piulițe, 17 % din volumul bazei se pierde.
22. De 8 ori. **23.** De $2\sqrt{2}$ ori.

§ 2. **5.** $\mathcal{A}_t = 24\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 36\pi$ cm^3. **6.** $\mathcal{A} = 312\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 1\,440\pi$ cm^3. **7.** $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ cm.
8. $2\sqrt{105}$ cm^2. **9.** $\mathcal{A} = \frac{9\sqrt{7}}{4}\pi(4 + \sqrt{7})$ cm^2, $\mathcal{V} = \frac{567\sqrt{2}}{4}\pi$ cm^3. **10.** $\mathcal{A}_l = \pi\sqrt{R^4 + 4S^2}$, $\mathcal{V} = 2\pi RS$.
11. 25 ml. **12.** $\mathcal{A}_l = \frac{h^2}{d^2}\sqrt{d^2\pi S + S^2}$, $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\frac{Sh^3}{d^2}$. **13.** $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\pi a^2 b^2\sqrt{a^2 + b^2}$ cm^3. **14.** 24π cm^2.
15. 125π cm^3. **16.** 256π cm^3. **17.** 384π cm^3. **18.** $1\,056\pi$ cm^3.

§ 3. **6.** $R = 50$ cm, $r = 6$ cm, $h = 117$ cm. **7.** 10 cm. **8.** 40 cm. **9.** 12 cm. **10.** 6,5 cm. **11.** 8,5 cm.
12. 13 cm. **13.** $10{,}5\pi$ dm^3. **14.** 2 cm şi 4 cm.

§ 4. **5.** a) 8 cm; b) 24 cm; c) 4 cm. **6.** $6\,400\pi$ km. **7.** a) $\mathcal{A} = 144\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 288\pi$ cm^3;

b) $\mathcal{A} = 6\frac{30}{49}\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 1\frac{286}{343}\pi$ cm^3; c) $\mathcal{A} = 108\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 108\sqrt{3}\pi$ cm^3. **8.** a) 81π cm^2; b) 180π cm^2; c) 0. **9.** Unui băiat. **10.** a) $3\,364\pi$ cm^2; b) $5\,476\pi$ cm^2. **11.** a) 43 cm^2. **12.** a) $\frac{3}{2\sqrt{\pi}}$ cm.

Exerciții și probleme recapitulative

3. $\mathcal{A}_t = \left(20\sqrt{15} + \frac{150}{\pi}\right)$cm^2, $\mathcal{V} = \frac{150\sqrt{5}}{\pi}$ cm^3. **4.** $\mathcal{A}_t = 15{,}75\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = \frac{9\sqrt{35}}{8}\pi$ cm^3. **5.** 6 cm. **6.** $\mathcal{A}_t = 33\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 36\pi$ cm^3. **7.** a) $\frac{200\sqrt{3}}{27}\pi$ cm^3; b) $\frac{100}{3\sqrt{13}}\pi$ cm^3. **8.** $\frac{54}{\pi}$ cm^3. **9.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **10.** Cazul I. $\mathcal{A}_l = 70\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 175\pi$ cm^3. Cazul II. $\mathcal{A}_l = 70\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = 245\pi$ cm^3. **11.** Masa bilei este mai mare. **12.** $\frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$ cm^3. **13.** 2 cm. **14.** 7 cm. **15.** Nu. **16.** $\frac{81\pi}{2}$ cm^3. **17.** Sfera. **18.** $\mathcal{A}_t = 108\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = \frac{216\sqrt{3}}{3}\pi$ cm^3. **19.** $\mathcal{A}_t = \left(169 + \frac{338\sqrt{3}}{3}\right)\pi$ cm^2, $\mathcal{V} = \frac{2197\sqrt{3}}{9}\pi$ cm^3. **20.** 90°. **21.** 60°. **22.** $\frac{3}{4}a^3\pi$. **23.** 13 cm. **24.** a) 256π cm^3; b) 256π cm^3.

Cuprins

Algebră

Geometrie